Azzolini Riccardo 2018-10-12

Funzioni

1 Funzione

Una relazione $f \subseteq A \times B$ è una **funzione** da A a B se per ogni elemento $a \in A$ esiste un unico $b \in B$ tale che $(a, b) \in f$ (cioè ogni $a \in A$ è in relazione con un unico $b \in B$).

- L'insieme A si chiama **dominio** (o **campo di esistenza**) di f.
- L'insieme B prende il nome di **codominio** di f.
- b si chiama **immagine** di a.

1.1 Notazione

- Per indicare che f è una funzione da A a B si scrive

  $$f : A \to B$$

- Per indicare che $(a, b) \in f$, si scrive

  $$f(a) = b$$

  oppure

  $$f : a \mapsto b$$

- Per indicare contemporaneamente il dominio, il codominio e il legame tra un elemento e la sua immagine, si può scrivere

  $$f : a \in A \mapsto f(a) \in B$$

  Ad esempio, $f : n \in \mathbb{N} \mapsto n + 1 \in \mathbb{N}^+$ corrisponde a

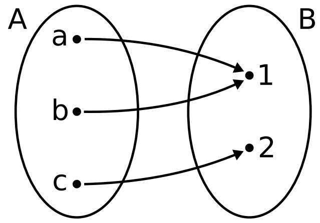
  - $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$
  - $f(n) = n + 1$, o anche $f : n \mapsto n + 1$

1.2 Esempi

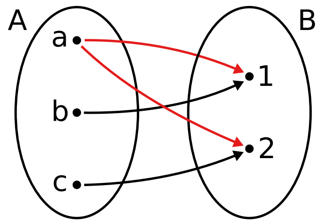
$$A = \{a, b, c\}$$

$$B = \{1, 2\}$$

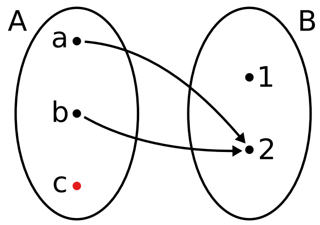
- $f = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2)\}$ è una funzione



- $\{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (c, 2)\}$ non è una funzione perché l'elemento $a \in A$ è in relazione con 2 elementi di B



- $\{(a, 2), (b, 2)\}$ non è una funzione perché l'elemento $c \in A$ non è in relazione con alcun elemento di B



2 Funzione identica

La funzione $f : A \to A$ tale che $f(a) = a$ per ogni $a \in A$ si chiama funzione **identica** (o **identità**) di A e si denota anche con id_A:

$$id_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$$

3 Funzione costante

Fissato un elemento $c \in B$, la funzione $f_c : A \to B$ tale che $f_c(a) = c$ per ogni $a \in A$ si chiama funzione **costante** (o **costantemente uguale** a c):

$$f_c = \{(a, c) \mid a \in A\}$$

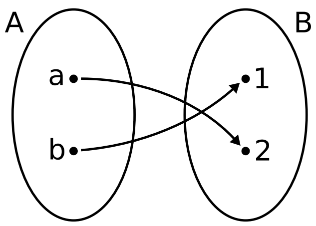
4 Funzione iniettiva

Una funzione $f : A \to B$ è **iniettiva** se elementi diversi del dominio hanno immagini diverse:

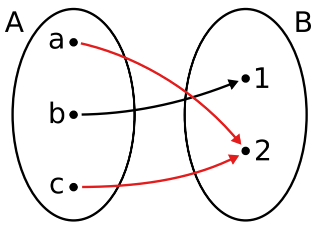
$$\forall x, y \in A, \quad x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$$

4.1 Esempi

- Questa funzione è iniettiva:



- Questa funzione non è iniettiva perché l'elemento $2 \in B$ è immagine di due elementi $a, c \in A$:



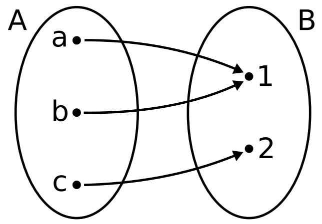
5 Funzione suriettiva

Una funzione $f : A \to B$ è **suriettiva** se ogni elemento di B è immagine di un elemento di A:

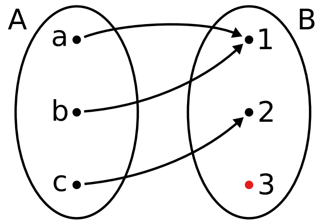
$$\forall y \in B, \quad \exists x \in A, \quad f(x) = y$$

5.1 Esempi

- Questa funzione è suriettiva:



- Questa funzione non è suriettiva perché l'elemento $3 \in B$ non è immagine di alcun elemento di A:

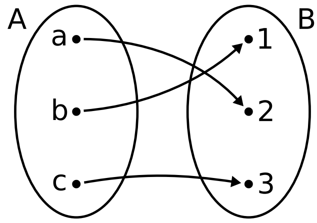


6 Funzione biettiva

Una funzione è **biettiva** (o **biunivoca**) se è sia *iniettiva* che *suriettiva*.

Una funzione biettiva è anche detta **corrispondenza biunivoca**.

6.1 Esempio



7 Esistenza di funzioni iniettive, suriettive e biettive

Se A e B sono insiemi finiti, si ha che:

- se $|A| > |B|$ non esistono funzioni *iniettive* da A a B
- se $|A| < |B|$ non esistono funzioni *suriettive* da A a B
- se $|A| \neq |B|$ non esistono funzioni *biettive* da A a B

Due insiemi A e B (finiti o infiniti) si dicono **equipotenti** se esiste una funzione biettiva tra A e B. Se sono finiti, A e B devono quindi avere lo stesso numero di elementi.

8 Numero di funzioni esistenti

Se A e B sono insiemi finiti, esistono $|B|^{|A|}$ funzioni da A a B.

8.1 Esempio

$$A = \{a, b\}$$
$$B = \{1, 2\}$$

$$|B|^{|A|} = 2^2 = 4$$

$$f_1 = \{(a, 1), (b, 1)\}$$
$$f_2 = \{(a, 1), (b, 2)\}$$
$$f_3 = \{(a, 2), (b, 1)\}$$
$$f_4 = \{(a, 2), (b, 2)\}$$