Azzolini Riccardo 2019-04-17

Polinomio di Taylor

1 Asintotici e polinomio di Taylor

Gli asintotici ricavati dai limiti notevoli corrispondono in genere ai polinomi $T_1(x)$ delle funzioni considerate. Ad esempio, per $x \to 0$:

$$\sin x = \underbrace{x}_{T_1(x)} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x \sim x = T_1(x)$$

La principale eccezione è $\cos x$, il cui asintotico per $x \to 0$ è $T_2(x)$, dato che non esiste il termine di grado 1:

$$\cos x = \underbrace{1 - \frac{x^2}{2}}_{T_2(x)} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + o(x^{2n})$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \iff \cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2} = T_2(x)$$

È possibile utilizzare come asintotici anche i polinomi di Taylor di ordini superiori. Questi, analogamente a quelli ottenuti dai limiti notevoli, possono essere applicati anche alle funzioni composte (effettuando implicitamente un cambiamento di variabile). Infatti, se $f(x) \to 0$ per $x \to x_0$, allora

- $e^{f(x)} \sim \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{[f(x)]^k}{k!}$ per $x \to x_0$
- $\log(1 + f(x)) \sim \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{[f(x)]^k}{k}$ per $x \to x_0$
- $\sin f(x) \sim \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{[f(x)]^{2k+1}}{(2k+1)!}$ per $x \to x_0$
- $\cos f(x) \sim \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{[f(x)]^{2k}}{(2k)!}$ per $x \to x_0$

Ciò è particolarmente utile quando gli asintotici si eliminano completamente nella semplificazione: basta considerare un polinomio di Taylor di ordine maggiore.

1.1 Esempio

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)-(x-1)}{\tan(x-1)}$$

Non è lecito applicare l'asintotico

$$\sin(x-1) \sim x-1 \quad \text{per } x \to 1$$

dato che risulterebbe 0 al numeratore, cioè l'asintotico si eliminerebbe completamente.

Si può invece utilizzare il polinomio $T_2(x)$:

$$\sin(x-1) \sim (x-1) - \frac{(x-1)^3}{3!} \quad \text{per } x \to x_0$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)-(x-1)}{\tan(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1) - \dfrac{(x-1)^3}{6} - (x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{-(x-1)^3}{6(x-1)} = 0$$

Al denominatore, invece, è stato normalmente applicato l'asintotico

$$\tan(x-1) \sim x-1 \quad \text{per } x \to 1$$

2 Polinomio di Taylor di una combinazione lineare

Siano f e g due funzioni derivabili n volte in x_0, e siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Allora, per la linearità delle derivate:

$$T_n(\alpha f + \beta g, x_0) = \alpha T_n(f, x_0) + \beta T_n(g, x_0)$$

3 Polinomio di Taylor della derivata

$$
\begin{aligned}
&T_n'(f,x_0) \\
&\quad = \bigg(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\
&\qquad + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \bigg)' \\
&\quad = f'(x_0) + \frac{2}{2!}f''(x_0)(x-x_0) + \frac{3}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{n}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^{n-1} \\
&\quad = f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + \frac{f'''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} \\
&\quad = T_{n-1}(f',x_0)
\end{aligned}
$$

4 Corollario del teorema di Peano

Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in $x_0 \in (a,b)$. Se $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, allora

- se n è pari, f ha in x_0
  - un minimo locale se $f^{(n)}(x_0) > 0$;
  - un massimo locale se $f^{(n)}(x_0) < 0$;
- se n è dispari, f non ha né un minimo né un massimo locale in x_0.

Dimostrazione: In generale,

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Siccome, per ipotesi, le derivate di ordine $\leq n-1$ sono nulle, si ha in questo caso che

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Di conseguenza, secondo il teorema di Peano, per $x \to x_0$ vale

$$f(x) \sim f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \implies f(x) - f(x_0) \sim \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

- Se n è pari, e $f^{(n)}(x_0) > 0$, allora

$$f(x) - f(x_0) \sim \underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}_{>0} \underbrace{(x - x_0)^n}_{\substack{>0 \\ \text{perché } n \text{ pari}}} > 0 \implies f(x) - f(x_0) > 0 \implies f(x) > f(x_0)$$

  per $x \to x_0$, cioè f ha un minimo locale in x_0.

- Se n è pari, e $f^{(n)}(x_0) < 0$, allora

$$f(x) - f(x_0) \sim \underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}_{<0} \underbrace{(x - x_0)^n}_{>0} < 0 \implies f(x) - f(x_0) < 0 \implies f(x) < f(x_0)$$

  per $x \to x_0$, cioè f ha un massimo locale in x_0.

- Se invece n è dispari, il segno di $(x - x_0)^n$, e quindi di $f(x) - f(x_0)$, cambia da sinistra a destra,

$$(x - x_0)^n \begin{cases} < 0 & \text{se } x < x_0 \\ > 0 & \text{se } x > x_0 \end{cases}$$

  e perciò non esiste né un minimo né un massimo locale in x_0. □

5 Stima dell'errore

In generale, l'errore commesso approssimando una funzione $f(x)$ con $T_n(x)$ è

$$E_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b), e siano $x, x_0 \in (a, b)$, $x \neq x_0$.

Si considera l'intervallo

$$I = \begin{cases} (x_0, x) & \text{se } x_0 < x \\ (x, x_0) & \text{se } x < x_0 \end{cases}$$

e vi si applica il teorema di Lagrange: $\exists c \in I$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \implies f'(c)(x - x_0) = f(x) - f(x_0)$$

Dato che $f(x_0) = T_0(x)$,

$$\underbrace{f(x) - T_0(x)}_{E_0(x)} = f'(c)(x - x_0) \quad \text{con } c \in I$$

quindi è possibile stimare l'errore $E_0(x)$ studiando il valore della derivata $f'(x)$ nell'intervallo I.

5.1 Esempio

Si vuole stimare l'errore commesso approssimando $\sqrt{17}$ con 4. A tale scopo, si considera la funzione

$$f(x) = 4\sqrt{1 + x}$$

tale che

$$\begin{aligned} f(0) &= 4\sqrt{1 + 0} = 4 = T_0(x) \\ f\left(\frac{1}{16}\right) &= 4\sqrt{1 + \frac{1}{16}} = 4\sqrt{\frac{17}{16}} = \sqrt{17} \end{aligned}$$

L'errore da stimare è quindi

$$\sqrt{17} - 4 = E_0\left(\frac{1}{16}\right) = \overbrace{f\left(\frac{1}{16}\right)}^{f(x)} - \overbrace{f(0)}^{T_0(x)} = f'(c)\left(\frac{1}{16} - 0\right), \quad c \in \left(0, \frac{1}{16}\right)$$

Calcolando la derivata,

$$f'(x) = \frac{4}{2\sqrt{1 + x}} = \frac{2}{\sqrt{1 + x}}$$

si può riscrivere l'errore come

$$E_0\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{2}{\sqrt{1 + c}} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{8\sqrt{1 + c}}, \quad c \in \left(0, \frac{1}{16}\right)$$

che, nell'intervallo considerato, è positivo e decresce all'aumentare di c, quindi il suo valore soddisfa la disuguaglianza

$$0 < E_0\left(\frac{1}{16}\right) < \frac{1}{8\sqrt{1+0}} = \frac{1}{8} = 0.125$$

In questo modo, si determina che

$$4 < \sqrt{17} < 4.125$$

6 Teorema del resto di Lagrange

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in (a,b), e derivabile $n+1$ volte in $(a,b) \setminus \{x_0\}$, con $x_0 \in (a,b)$. Se $f^{(n)}$ è continua in (a,b), allora $\forall x \in (a,b)$, $x \neq x_0 \quad \exists c \in (x_0, x)$ (o $\in (x, x_0)$) tale che

$$E_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$