Azzolini Riccardo 2018-11-13

# Sistemi di equazioni lineari

## 1 Equazione lineare

Un'**equazione lineare** è un'espressione del tipo

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$$

dove:

- $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ sono i **coefficienti**
- $b \in \mathbb{R}$ è il **termine noto**
- $x_1, ..., x_n$ sono le $n$ **incognite**

Una **soluzione** di un'equazione lineare con $n$ incognite è una $n$-upla $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n = b$$

### 1.1 Esempio

$$2x_1 + x_2 = 3$$

è un'equazione con $n = 2$ incognite. Per comodità la si può scrivere come:

$$2x + y = 3$$

Essa ha infinite soluzioni:

$$y = 3 - 2x$$

- $(0, 3)$, cioè $x = 0$ e $y = 3$
- $(1, 1)$
- $(2, -1)$

- ecc.

# 2 Sistema di equazioni lineari

Un **sistema di equazioni lineari** è un'insieme di $m$ equazioni lineari nelle stesse $n$ incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \cdots + \ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \cdots + \ a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Una soluzione di un sistema è una $n$-upla $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ che è soluzione di *tutte* le $m$ equazioni.

# 3 Sistemi compatibili e incompatibili

Un sistema è **compatibile** se ammette soluzioni, altrimenti è **incompatibile**.

Un sistema compatibile di equazioni lineari può avere una singola soluzione oppure **infinite** soluzioni (ma non 2, 3, ecc. soluzioni). Un sistema con infinite soluzioni si dice anche **indeterminato**.

## 3.1 Esempio

$$\begin{cases} x + \ \ y = 1 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$$

La seconda equazione si può scrivere come:

$$2(x + y) = 3$$

Ma, per la prima equazione, $x + y = 1$, quindi:

$$2 \cdot 1 = 3$$

Il sistema è incompatibile.

## 4 Interpretazione geometrica

L'insieme $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ corrisponde al **piano cartesiano**: si fissano gli assi cartesiani, che sono due rette perpendicolari, e si associa a ogni punto una coppia di numeri, le sue **coordinate cartesiane**. In particolare, l'intersezione degli assi è l'origine e ha coordinate $(0, 0)$.

Data un'equazione lineare in 2 incognite

$$ax + by = c$$

l'insieme delle sue infinite soluzioni

$$\left\{(x, y) \mid y = \frac{c - ax}{b}\right\}$$

corrisponde a una retta nel piano cartesiano.

Un sistema di 2 equazioni in 2 incognite definisce quindi 2 rette, e le soluzioni corrispondono alle intersezioni delle rette:

- se esse si intersecano in un punto, il sistema ha un'unica soluzione
- se invece sono parallele, il sistema è incompatibile
- infine, se le due rette coincidono il sistema ha infinite soluzioni

Se ci sono 3 incognite, ogni equazione rappresenta un piano in $\mathbb{R}^3$, e quindi un sistema corrisponde all'intersezione di più piani.

Infine, l'insieme delle soluzioni di un'equazione in $n > 3$ incognite forma un *iperpiano*.