Azzolini Riccardo 2019-03-25

Serie e criteri di convergenza

1 Serie geometrica

La serie $\sum_{k=0}^{+\infty} r^k$, dove $r \in \mathbb{R}$ *non* dipende da k, si chiama **serie geometrica**, e r si dice **ragione** di tale serie.

Il suo comportamento è

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k \begin{cases} = +\infty & \text{se } r \geq 1 \\ = \dfrac{1}{1-r} & \text{se } -1 < r < 1, \text{ cioè } |r| < 1 \\ \nexists & \text{se } r \leq -1 \end{cases}$$

Dimostrazione: La successione delle somme parziali è

$$s_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n$$

- Sia $r \neq 1$. Moltiplicando s_n per r, si ottiene

  $$rs_n = r + r^2 + r^3 + r^4 + \cdots + r^n + r^{n+1}$$

  e quindi

  $$\begin{aligned} s_n - rs_n &= 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n \\ &\quad\; - r - r^2 - r^3 - \cdots - r^n - r^{n+1} \\ (1-r)s_n &= 1 - r^{n+1} \\ s_n &= \frac{1 - r^{n+1}}{1-r} \end{aligned}$$

  che ha limite

$$\lim_{n\to+\infty} s_n \begin{cases} = +\infty & \text{se } r > 1 \\ = \dfrac{1}{1-r} & \text{se } -1 < r < 1 \\ \nexists & \text{se } r \leq -1 \end{cases}$$

- Sia invece $r = 1$. In questo caso

$$s_n = \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{n+1 \text{ volte}} = n + 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty \qquad \square$$

1.1 Generalizzazione a $k = k_0$

La serie

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} r^k$$

ha, in generale, lo stesso comportamento della serie geometrica che inizia da $k = 0$, ma se $|r| < 1$ la somma a cui converge è

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0}^{+\infty} r^k &= \sum_{k=0}^{+\infty} r^k - \sum_{k=0}^{k_0-1} r^k \\ &= \frac{1}{1-r} - \frac{1-r^{k_0}}{1-r} \\ &= \frac{1-(1-r^{k_0})}{1-r} \\ &= \frac{r^{k_0}}{1-r} \end{aligned}$$

1.2 Esempi

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

è una serie geometrica: siccome $r = -\frac{1}{2} \implies |r| < 1$, la serie converge.

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+1}\right)^k$$

non è una serie geometrica perché $\frac{1}{k+1}$ dipende da k.

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^k = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = -\frac{1}{4}$$

perché $r = -\frac{1}{3} \implies |r| < 1$.

2 Somma di serie

Una serie il cui termine generale è una somma, cioè

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k + b_k)$$

si può riscrivere come somma di due serie:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$$

Non sempre, però, è possibile determinare il comportamento della somma da quello delle due serie:

$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$	$\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$	$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$
converge a S_a	converge a S_b	converge a $S_a + S_b$
converge	diverge a $+\infty$ $(-\infty)$	diverge a $+\infty$ $(-\infty)$
diverge a $+\infty$ $(-\infty)$	diverge a $+\infty$ $(-\infty)$	diverge a $+\infty$ $(-\infty)$
diverge a $+\infty$ $(-\infty)$	diverge a $-\infty$ $(+\infty)$	non si può stabilire in questo modo

2.1 Esempio

$$\sum_{k=3}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^k+3^k\right]=\sum_{k=3}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k+\sum_{k=3}^{+\infty}3^k$$

- $\sum_{k=3}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ è una serie geometrica con $r=\frac{1}{2}<1$, quindi converge.
- $\sum_{k=3}^{+\infty}3^k$ è una serie geometrica con $r=3\geq 1$, quindi diverge a $+\infty$.

Di conseguenza, la somma delle due serie diverge a $+\infty$.

3 Serie a termini positivi

Una serie $\sum_{k=0}^{+\infty}a_k$ si dice

- **a termini positivi** se $a_k\geq 0 \quad \forall k\in\mathbb{N}$;
- **a termini definitivamente positivi** se $\exists N\in\mathbb{N}$ tale che $a_k\geq 0 \quad \forall k>N$.

In generale, tutto ciò che vale per le serie a termini positivi continua a valere per quelle a termini definitivamente positivi.

3.1 Comportamento

Sia $\sum_{k=0}^{+\infty}a_k$ una serie a termini positivi. Allora

$$\begin{aligned}
s_0 &= a_0\\
s_1 &= a_0+a_1\geq s_0\\
s_2 &= a_0+a_1+a_2\geq s_1\\
&\vdots\\
s_n &= a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n\geq s_{n-1}
\end{aligned}$$

cioè la successione delle somme parziali $\{s_n\}$ è crescente: perciò essa, e per definizione la serie, converge a un valore finito (se e solo se $\{s_n\}$ è limitata) o diverge a $+\infty$ (se e solo se $\{s_n\}$ è illimitata superiormente).

In altre parole, una serie a termini positivi non è mai indeterminata: o converge, oppure diverge a $+\infty$.

4 Criterio del confronto

Siano $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ due serie a termini positivi (o definitivamente positivi), tali che $a_k \leq b_k$ definitivamente per $k \to +\infty$.

- Se $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ converge, allora $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge.
- Se $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ diverge, allora $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ diverge.

Viceversa, sapendo che $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ diverge o che $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge, *non* si ricavano informazioni sull'altra serie.

Dimostrazione: Siano

- $\{s_n\}$ la successione delle somme parziali di $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$;
- $\{s'_n\}$ la successione delle somme parziali di $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$.

Tali successioni sono crescenti perché le due serie sono a termini positivi.

Supponendo, per semplicità, che $a_k \leq b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$,[1] si ha che

$$\begin{aligned} s_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &\leq b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_n = s'_n \end{aligned}$$

- $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ converge se e solo se la successione crescente $\{s'_n\}$ è limitata: allora anche $\{s_n\}$ è una successione crescente limitata, e quindi $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge.
- $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ diverge se e solo se $\{s_n\}$ è illimitata (superiormente): allora deve esserlo anche $\{s'_n\}$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ diverge. $\square$

4.1 Esempi

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+1}$

$$\frac{1}{k^2+1} < \frac{1}{k^2}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \text{ converge } \implies \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2+1} \text{ converge}$$

[1] Se invece la disuguaglianza vale solo definitivamente, cioè $\forall n \geq N$, si ha che $s_n - s_{N-1} \leq s'_n - s'_{N-1}$ definitivamente, ma allora $s_n \leq s'_n + (s_{N-1} - s'_{N-1})$ e, siccome s_{N-1} e s'_{N-1} sono valori finiti costanti, è comunque vero che s_n deve essere limitata se lo è s'_n, e che s'_n è sicuramente illimitata se lo è s_n.

- $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log n}$

$$\log n < n \implies \frac{1}{\log n} > \frac{1}{n} \quad \text{per } n \to +\infty$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge} \implies \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log n} \text{ diverge}$$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

  ma $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge, quindi con questa maggiorazione non si può applicare il teorema del confronto. Sarebbe necessario provare altre maggiorazioni/minorazioni, ma per studiare questa serie conviene usare altri criteri.

5 Criterio del confronto asintotico

Siano $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$ due successioni tali che $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$. Allora le serie a termini positivi $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ hanno lo stesso comportamento:

- $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge se e solo se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge;
- $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge se e solo se $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge.

Nota: Questo criterio è solitamente più semplice da applicare rispetto a quello del confronto, perché non è necessario intuire prima il comportamento della serie per scegliere la maggiorazione/minorazione da effettuare.

5.1 Esempi

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$

$$\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n} \quad \text{per } n \to +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge} \implies \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \text{ diverge}$$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n^3+2n^2}$

$$\frac{\sqrt{n}+1}{n^3+2n^2} \sim \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^3} = \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} \quad \text{per } n \to +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} \text{ converge} \implies \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n^3+2n^2} \text{ converge}$$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \quad \text{per } n \to +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge} \implies \sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \text{ diverge}$$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n^2}$

$$\frac{1}{n^2} \in (0,1] \implies \sin\frac{1}{n^2} > 0$$

  quindi la serie è a termini positivi.

$$\sin\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2} \quad \text{per } n \to +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ converge} \implies \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n^2} \text{ converge}$$

6 Criterio del rapporto

Sia $\{a_n\}$ una successione tale che $a_n > 0$ (almeno definitivamente).

1. Se $\exists 0 < r < 1$ tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le r \quad \forall n$$

   allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

2. Se invece

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad \forall n$$

la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge.

Dimostrazione:

1. Per ipotesi,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r \quad \forall n$$

Allora si ha anche che

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq r, \quad \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \leq r, \quad \text{ecc.}$$

e perciò

$$\begin{aligned} a_n &\leq r \cdot a_{n-1} \\ &\leq r \cdot r \cdot a_{n-2} \\ &\leq r \cdot r \cdot r \cdot a_{n-3} \\ &\vdots \\ &\leq \underbrace{r \cdot r \cdot \cdots \cdot r}_{n \text{ volte}} \cdot a_0 = a_0\, r^n \end{aligned}$$

La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_0\, r_n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} r^n$ è una serie geometrica con ragione $0 < r < 1$, che converge, quindi, per il criterio del confronto, anche $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.

2. Per ipotesi, si ha che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \implies a_{n+1} \geq a_n > 0$$

Di conseguenza,

$$\lim_{n \to +\infty} a_n \neq 0$$

cioè non è verificata la condizione necessaria per la convergenza. Siccome la serie è a termini positivi, non può essere indeterminata, e allora diverge. □

6.1 Corollario

Sia $a_n > 0$ definitivamente per $n \to +\infty$. Se

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

allora:

- se $L < 1$, la serie converge (*osservazione*: $L \geq 0$ perché la serie è a termini positivi);
- se $L > 1$, la serie diverge a $+\infty$;
- se $L = 1$, non si hanno informazioni sul comportamento della serie.

6.2 Esempi

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3\cdot 3^n}{(n+1)n!}\cdot\frac{n!}{3^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n+1} = 0 < 1$$

quindi la serie converge.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{2n^2+n}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{n+1}+1}{2(n+1)^2+n+1}}{\frac{\sqrt{n}+1}{2n^2+n}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1}+1}{2(n+1)^2+n+1}\cdot\frac{2n^2+n}{\sqrt{n}+1} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n^2}\cdot\frac{2n^2}{\sqrt{n}} = 1\end{aligned}$$

perciò non si hanno informazioni sul comportamento della serie. Si può invece usare il criterio del confronto asintotico:

$$\frac{\sqrt{n}+1}{2n^2+n} \sim \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2n^2} = \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$$

Si ottiene così una serie armonica generalizzata con $\alpha = \frac{3}{2} > 1$, che converge, quindi anche la serie studiata converge.

Osservazione: Se il termine generale è un quoziente di potenze di n, il limite del rapporto è sempre 1, quindi questo criterio non funziona mai.

7 Criterio della radice

Sia $a_n \geq 0$ definitivamente per $n \to +\infty$.

1. Se $\exists 0 < r < 1$ tale che $\sqrt[n]{a_n} \leq r \quad \forall n$, la serie converge.
2. Se invece $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \quad \forall n$, la serie diverge.

Dimostrazione:

1. Per ipotesi, $\sqrt[n]{a_n} \leq r \implies a_n \leq r^n$, e $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$ è una serie geometrica convergente perché $0 < r < 1$, quindi, per il criterio del confronto, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge.
2. Per ipotesi, $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \implies a_n \geq 1$, e di conseguenza

$$\lim_{n \to +\infty} a_n \neq 0$$

cioè non è verificata la condizione necessaria per la convergenza. Essendo a termini positivi, la serie non è indeterminata, e deve allora essere divergente. □

7.1 Corollario

Sia $a_n \geq 0$ definitivamente per $n \to +\infty$. Se

$$\exists \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

allora:

- se $L < 1$, la serie converge;
- se $L > 1$, la serie diverge;
- se $L = 1$, non si hanno informazioni sul comportamento della serie.

7.2 Esempi

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2n+1}{n+3}\right)^n$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{n+3}\right)^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+1}{n+3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{n}=2>1$$

  quindi la serie diverge (in questo caso, si potrebbe anche osservare che non è verificata la condizione necessaria per la convergenza).

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{2^n}$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n^2}}{2}=\frac{1}{2}<1$$

  quindi la serie converge.