Azzolini Riccardo 2020-12-03

Automi a pila

1 Automi a pila

Una volta introdotta la classe dei linguaggi context-free, generati dalle CFG, si vuole individuare un modello che permetta di riconoscere tali linguaggi. I riconoscitori trattati finora, cioè gli automi a stati finiti (in tutte le loro varianti), non sono adeguati a questo scopo, poiché si è visto che esistono linguaggi context-free, come ad esempio quello dei palindromi, che non sono regolari, ovvero non sono riconoscibili da automi a stati finiti. L'idea che consente di definire un modello più "potente" è quella di eliminare uno dei grossi vincoli degli automi a stati finiti: la quantità di memoria finita. A tale scopo, si estendono gli automi a stati finiti con una memoria esterna potenzialmente infinita. Tuttavia, perché sia possibile riconoscere esattamente i linguaggi context-free, bisogna imporre su tale memoria una politica di accesso *LIFO*, *Last In First Out*, cioè la memoria deve essere uno *stack*, una *pila*, nella quale si può manipolare solo l'elemento in cima. Il modello risultante è definito formalmente in seguito:

Un **automa a pila** (**PDA**, *PushDown Automaton*) è una settupla

$$P = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F \rangle$$

in cui:

- Q è un insieme finito e non vuoto di **stati**;
- Σ è l'**alfabeto di input**;
- Γ è l'**alfabeto di stack**;
- $q_0 \in Q$ è lo **stato iniziale**;
- $Z_0 \in \Gamma$ è il **simbolo iniziale di stack**;
- $F \subseteq Q$ è l'insieme degli **stati finali**;
- δ è la **funzione di transizione**,

  $$\delta : Q \times \Sigma_\epsilon \times \Gamma \to \mathcal{P}_{\text{fin}}(Q \times \Gamma^*)$$

  dove la notazione $\mathcal{P}_{\text{fin}}(S)$ indica l'insieme dei sottoinsiemi finiti di S.

Quello appena definito è un automa non deterministico con ϵ-mosse, un'estensione degli ϵ-NFA:[1] dalla definizione di questi ultimi rimangono invariati gli elementi Q, Σ, q_0 e F.

Lo stack viene modellato come una stringa di simboli di un apposito alfabeto Γ. Per convenzione, il simbolo più a sinistra della stringa è quello in cima allo stack, cioè una stringa $a_1 \dots a_n$ corrisponde al seguente stack:

$$\left|\begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{array}\right|$$

Quando si definiranno i passi di computazione, sarà comodo trattare solo i casi in cui lo stack non è vuoto, così da avere sempre un simbolo in cima allo stack, in base al quale scegliere la transizione da eseguire. Allora, è necessario che lo stack contenga inizialmente (almeno) un simbolo: a tale scopo, si sceglie un simbolo iniziale di stack $Z_0 \in \Gamma$. Spesso, sarà utile fare in modo che Z_0 rimanga sempre e solo in fondo allo stack, e sia distinto da tutti gli altri simboli inseriti nello stack:

$$\left|\begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ Z_0 \end{array}\right|$$

in questo modo, quando l'automa troverà Z_0 come elemento in cima, saprà di essere arrivato al fondo dello stack.

L'ultimo elemento della definizione è la funzione di transizione δ, che descrive come l'automa evolve in una mossa di computazione. Un'applicazione di questa funzione ha la forma

$$(q, a, X) \overset{\delta}{\mapsto} \{(p_1, \gamma_1), \dots, (p_n, \gamma_n)\}$$

dove $q, p_1, \dots, p_n \in Q$, $a \in \Sigma_\epsilon$, $X \in \Gamma$ e $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Gamma^*$. Come negli ϵ-NFA, l'evoluzione dipende dallo stato attuale q e dal simbolo in input a (che può essere ϵ per rappresentare una transizione "spontanea", senza consumo di input), ma in più viene considerato anche il simbolo X in cima allo stack, quindi il dominio di δ è $Q \times \Sigma_\epsilon \times \Gamma$. Trattandosi poi di un automa non deterministico, il risultato di δ è un insieme di possibili evoluzioni, ciascuna delle quali è una coppia $(p_i, \gamma_i) \in Q \times \Gamma^*$, dove p_i è lo stato in cui passa l'automa e γ_i è una stringa che descrive come modificare lo stack. Γ^*, e di conseguenza $Q \times \Gamma^*$, è un insieme infinito, dunque il codominio di δ non può essere l'insieme delle parti $2^{Q \times \Gamma^*}$, perché ciò

[1] Si possono definire anche i PDA deterministici, ma essi riconoscono *meno* linguaggi di quelli non deterministici (a differenza di quanto accadeva per gli automi a stati finiti), e per brevità non verranno presentati.

ammetterebbe come risultati anche sottoinsieme infiniti, sui quali non sarebbe possibile definire le computazioni; per considerare invece solo i sottoinsiemi finiti, si sceglie come codominio $\mathcal{P}_{\text{fin}}(Q \times \Gamma^*)$.

La stringa γ_i indica i simboli con cui sostituire X in cima allo stack:

- se $\gamma_i = X$, lo stack rimane immutato;

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ \vdots \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_i = X} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ \vdots \end{bmatrix}$$

- se $\gamma_i = \epsilon$, si elimina il simbolo X dalla cima dello stack;

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ \vdots \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_i = \epsilon} \begin{bmatrix} Y \\ \vdots \end{bmatrix}$$

- se infine $\gamma_i = \alpha Z$, con $\alpha \in \Gamma^*$[2] e $Z \in \Gamma$, X viene sostituito con Z e i simboli di α vengono aggiunti uno a uno in cima allo stack, procedendo da destra verso sinistra, quindi se $\alpha = a_1 \dots a_n$ rimane in cima allo stack il simbolo a_1.

$$\begin{bmatrix} \\ \\ X \\ Y \\ \vdots \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma_i = a_1 \dots a_n Z} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ Z \\ Y \\ \vdots \end{bmatrix}$$

2 Esempio: palindromi di lunghezza pari

Si consideri il linguaggio dei palindromi di lunghezza pari,

$$L_{ww^R} = \{ww^R \mid w \in \{0,1\}^*\}$$

cioè il linguaggio tale che $\alpha \in L_{ww^R}$ se e solo se esiste $w \in \{0,1\}^*$ tale che $\alpha = ww^R$. Esso è generato dalla CFG con le seguenti regole di produzione:

$$P \to \epsilon \mid 0P0 \mid 1P1$$

Si vuole costruire un PDA P_{ww^R} che riconosca (intuitivamente) il linguaggio L_{ww^R}. Siccome ogni stringa del linguaggio è formata da due "metà", w e w^R, una strategia

[2] Volendo, si potrebbe imporre che $\alpha \in \Gamma \cup \{\epsilon\}$, ovvero limitare la "crescita" dello stack a un simbolo alla volta: il modello risultante sarebbe equivalente, ma meno comodo per le dimostrazioni.

per il riconoscimento è memorizzare nello stack i simboli della prima metà, poi estrarre i simboli dallo stack e verificare che corrispondano a quelli della seconda metà della stringa (sfruttando l'inversione dell'ordine dei simboli che viene determinata naturalmente dalla politica di accesso LIFO). C'è però un problema: il PDA può leggere solo un simbolo alla volta, quindi non ha modo di sapere quando è arrivato a metà della stringa di input. Una soluzione è sfruttare il non determinismo, facendo a ogni simbolo due "scommesse", di essere e di non essere arrivati a metà, e lasciando che la computazione data dalla scommessa errata si blocchi.

Per implementare la strategia appena descritta, P_{ww^R} deve avere tre stati (q_0, q_1 e q_2):

- l'automa si trova nello stato iniziale q_0 finché non assume di aver terminato la lettura della prima metà della stringa, w;
- l'automa si trova in q_1 quando sta verificando che la seconda metà della stringa sia w^R;
- l'automa si trova nello stato finale q_2 quando ha riconosciuto una stringa della forma ww^R, che potrebbe essere l'intera stringa in input $\alpha = ww^R$, oppure solo un suo prefisso (se $\alpha = ww^R\beta$), e in quest'ultimo caso la computazione si dovrebbe bloccare alla lettura del simbolo successivo, per evitare l'accettazione di una stringa non palindroma.

In base alle osservazioni fatte finora, si può iniziare a dare una caratterizzazione formale dell'automa:

$$P_{ww^R} = \langle \{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \{0, 1, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_2\} \rangle$$

- gli stati sono i tre appena descritti, con q_0 iniziale e q_2 finale;
- l'alfabeto di input è $\{0, 1\}$, quello su cui è costruito il linguaggio da riconoscere;
- l'alfabeto di stack è $\{0, 1, Z_0\}$, perché lo stack deve poter contenere i simboli della stringa in input e il simbolo iniziale di stack Z_0.

Rimane da definire la funzione di transizione δ, il "programma" dell'automa:

- Nello stato q_0, se si assume di non essere arrivati a metà, bisogna leggere un simbolo di input, memorizzarlo nello stack, e rimanere in q_0. L'azione da compiere è indipendente dagli specifici simboli in input e in cima allo stack, ma formalmente va specificata per ogni combinazione di tali simboli:

$$\begin{array}{lll} \delta(q_0, 0, Z_0) = \{(q_0, 0Z_0)\} & \delta(q_0, 0, 0) = \{(q_0, 00)\} & \delta(q_0, 0, 1) = \{(q_0, 01)\} \\ \delta(q_0, 1, Z_0) = \{(q_0, 1Z_0)\} & \delta(q_0, 1, 0) = \{(q_0, 10)\} & \delta(q_0, 1, 1) = \{(q_0, 11)\} \end{array}$$

  In sintesi, si potrebbe scrivere:

$$\forall a \in \{0, 1\},\ \forall X \in \{0, 1, Z_0\} \quad \delta(q_0, a, X) = \{(q_0, aX)\}$$

Se invece si assume di essere arrivati a metà della stringa, cioè di aver completato la lettura della parte w, e dover invece iniziare la verifica della parte w^R, si passa allo stato q_1 senza consumare input (si fa un'ϵ-mossa) e senza modificare lo stack:

$$\delta(q_0, \epsilon, Z_0) = \{(q_1, Z_0)\} \qquad \delta(q_0, \epsilon, 0) = \{(q_1, 0)\} \qquad \delta(q_0, \epsilon, 1) = \{(q_1, 1)\}$$

ovvero

$$\forall X \in \{0, 1, Z_0\} \quad \delta(q_0, \epsilon, X) = \{(q_1, X)\}$$

- Nello stato q_1, se si legge un simbolo in input a che coincide con il simbolo in cima allo stack, si cancella a dalla cima dello stack e si resta in q_1:

  $$\delta(q_1, 0, 0) = \{(q_1, \epsilon)\} \qquad \delta(q_1, 1, 1) = \{(q_1, \epsilon)\}$$

  Se invece a non coincide con la cima dello stack, eventualmente anche perché nello stack rimane solo Z_0, la computazione si blocca:

  $$\begin{aligned} \delta(q_1, 0, 1) &= \varnothing \qquad & \delta(q_1, 0, Z_0) &= \varnothing \\ \delta(q_1, 1, 0) &= \varnothing \qquad & \delta(q_1, 1, Z_0) &= \varnothing \end{aligned}$$

  A ogni passo in q_1, l'automa prova inoltre ad assumere di essere arrivato alla fine dell'input. Uno stack contenente solo Z_0 significa allora che per ogni simbolo di w è stato letto un corrispondente simbolo nella seconda metà w^R, quindi la stringa in input è palindroma (o meglio, lo è il prefisso letto finora, che l'automa suppone sia l'intera stringa), e si passa allo stato finale q_2:

  $$\delta(q_1, \epsilon, Z_0) = \{(q_2, Z_0)\}$$

  Se invece lo stack contiene ancora 0 e/o 1, significa che mancano dei simboli per completare w^R, dunque l'automa non può assumere (per ora) che l'input sia un palindromo, e la computazione relativa a tale assunzione si blocca:

  $$\delta(q_1, \epsilon, 0) = \varnothing \qquad \delta(q_1, \epsilon, 1) = \varnothing$$

- Nello stato q_2, l'automa ha riconosciuto un palindromo di lunghezza pari, che suppone sia l'intera stringa di input. Da qui non si può procedere ulteriormente,

  $$\forall a \in \{0, 1, \epsilon\},\ \forall X \in \{0, 1, Z_0\} \quad \delta(q_2, a, X) = \varnothing$$

  quindi la stringa viene accettata se non ci sono più simboli in input, altrimenti la computazione si blocca, perché il palindromo riconosciuto era solo un prefisso dell'intero input.

Riassumendo, la funzione di transizione è definita come:

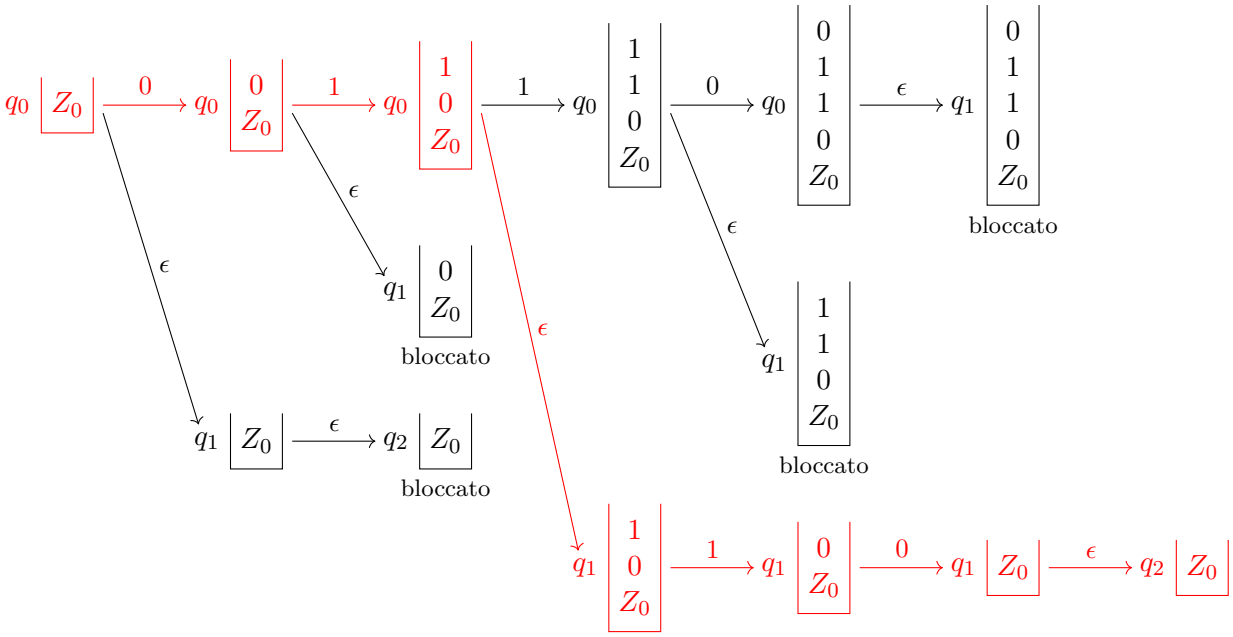
$$\begin{aligned}
\forall a \in \{0,1\},\ \forall X \in \{0,1,Z_0\} \quad & \delta(q_0, a, X) = \{(q_0, aX)\} \\
\forall X \in \{0,1,Z_0\} \quad & \delta(q_0, \epsilon, X) = \{(q_1, X)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta(q_1,0,0) &= \{(q_1,\epsilon)\} & \delta(q_1,1,1) &= \{(q_1,\epsilon)\} \\
\delta(q_1,0,1) &= \varnothing & \delta(q_1,0,Z_0) &= \varnothing \\
\delta(q_1,1,0) &= \varnothing & \delta(q_1,1,Z_0) &= \varnothing \\
\delta(q_1,\epsilon,Z_0) &= \{(q_2,Z_0)\} & \delta(q_1,\epsilon,0) &= \delta(q_1,\epsilon,1) = \varnothing
\end{aligned}$$

$$\forall a \in \{0,1,\epsilon\},\ \forall X \in \{0,1,Z_0\} \quad \delta(q_2,a,X) = \varnothing$$

2.1 Esempio di computazione

In seguito è raffigurato l'albero di computazione dell'automa P_{ww^R} sulla stringa 0110, con evidenziato in rosso il percorso che porta all'accettazione:



3 Rappresentazione grafica

I PDA possono essere rappresentati graficamente, in modo simile agli automi a stati finiti. L'unica cosa che cambia sono le etichette delle transizioni: se $(p, \gamma) \in \delta(q, a, X)$, lo stato di partenza q e lo stato di arrivo p sono indicati dalla freccia della transizione, ma rimangono da indicare il simbolo in input a (come negli automi a stati finiti), il simbolo

X in cima allo stack e la stringa γ di modifica dello stack. La notazione che viene usata per questi tre elementi è $a, X/\gamma$: in pratica, la parte prima della barra indica quando si applica la transizione, mentre la parte dopo indica come viene modificato lo stack quando l'automa esegue questa transizione.

Ad esempio, l'automa P_{ww^R} descritto prima è rappresentato dal seguente diagramma di transizione: