Azzolini Riccardo 2020-04-07

# Variabili aleatorie continue

## 1 Variabili aleatorie continue

Finora, si sono considerate variabili aleatorie discrete, cioè che assumono al più un'infinità numerabile di valori. Esistono però molti problemi la cui modellazione richiede variabili aleatorie che possono assumere qualunque valore in $\mathbb{R}$ (o in un intervallo di $\mathbb{R}$). Tali variabili aleatorie sono dette **continue**.

Ci si pone allora il problema di riportare sulle variabili aleatorie continue le definizioni date per il caso discreto. Ciò non è sempre immediato: ad esempio, se si provasse a mantenere la definizione di densità come probabilità che la variabile assuma un determinato valore,

$$p(x) = P\{X = x\}$$

essa risulterebbe nulla, perché la probabilità di ciascun singolo valore tra gli infiniti possibili è 0; sarà invece necessario definire prima la probabilità sugli intervalli (considerando la funzione di ripartizione $F_X(x) = P\{X \leq x\}$), e poi ricavare da essa un qualche concetto di densità.

## 2 Esempio: tempo di vita di un componente

Si vuole studiare il primo istante in cui un componente elettronico smette di funzionare, relativamente a quando è stato avviato (ovvero, equivalentemente, il suo tempo di vita). Esso corrisponde a una variabile aleatoria $X$ che può assumere qualunque valore reale $\geq 0$, e la probabilità che il componente si guasti in un preciso istante $t$ è 0:

$$P\{X = t\} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Invece, si può calcolare la probabilità $P\{X \leq t\}$ che il componente non funzioni all'istante $t$, cioè considerare i casi in cui il guasto si verifica all'istante *$t$ o anche prima* (o ancora, calcolare la probabilità che il tempo di vita sia *al più $t$*). Ad esempio, si suppone che tale probabilità dipenda dalla concentrazione $\lambda$ di silicio nel materiale di cui è fatto il componente, secondo la legge

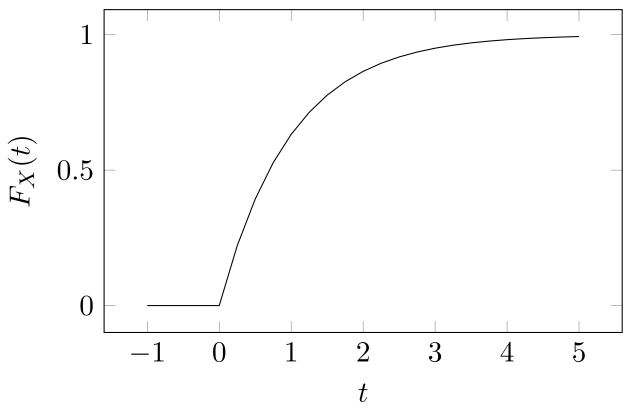
$$P\{X \leq t\} = 1 - e^{-\lambda t}$$

(ricavata sperimentalmente). Scritta in questo modo, però, $P\{X \leq t\}$ assumerebbe valori negativi per $t < 0$: ciò non è ammesso dalla definizione di probabilità, e comunque (in questo esempio) non ha senso che il componente smetta di funzionare prima di essere avviato, quindi ciò dovrebbe avere probabilità 0. Allora, più precisamente, la funzione di ripartizione di $X$ è:

$$F_X(t) = P\{X \leq t\} = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa distribuzione è chiamata legge **esponenziale** di parametro $\lambda > 0$.

Funzione di ripartizione esponenziale per $\lambda = 1$




A partire da essa, si vuole trovare un modo di definire la densità $f(t)$ della variabile aleatoria $X$.

Nel caso discreto, si aveva $f(t) = P\{X = t\} > 0$ solo in corrispondenza delle discontinuità (salti) della funzione di ripartizione, ma qui essa è continua:

- per $t > 0$, $1 - e^{-\lambda t}$ è continua;
- per $t < 0$, la funzione costante 0 è continua;
- in $t = 0$, si ha

$$\lim_{t \to 0^-} F_X(t) = 0$$
$$\lim_{t \to 0^+} F_X(t) = F_X(0) = 1 - e^{-\lambda 0} = 0$$

Ciò conferma che, come già detto, $P\{X = t\} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, e che, perciò, non è utile la definizione $f(t) = P\{X = t\}$. Piuttosto, sapendo che si può avere probabilità non nulla sugli intervalli, per definire la densità si può pensare di considerare un intervallo $dt$ sempre più piccolo, mediante il calcolo della derivata di $F_X(t)$. Si prova allora la definizione

$$f(t) = F'_X(t) = \frac{d}{dt} F_X(t)$$

Tuttavia, perché la derivata di $F_X(t)$ possa essere considerata una densità, è necessario che, integrandola, si ottenga nuovamente la funzione di ripartizione (così come, nel caso discreto, la funzione di ripartizione poteva essere calcolata sommando la densità per tutti i valori assunti dalla variabile):

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\, dx$$

Il teorema fondamentale del calcolo integrale garantisce che ciò sia possibile solo se $F_X(t)$ è derivabile con derivata continua su tutto $\mathbb{R}$, ma le funzioni di ripartizione spesso non lo sono, compresa quella considerata in questo esempio, che:

- per $t \neq 0$ è derivabile, con derivata

$$F'_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

- in $t = 0$ *non* è derivabile, perché:

$$\begin{aligned} &\lim_{t \to 0^-} F'_X(t) = 0 \\ &\lim_{t \to 0^+} F'_X(t) = \lim_{t \to 0^+} \lambda e^{-\lambda t} = \lambda e^{-\lambda 0} = \lambda > 0 \end{aligned}$$

Si può però osservare che, se anche $F'_X(0) = f(0)$ esistesse (con un valore arbitrario), non contribuirebbe al valore dell'integrale, perché l'integrale di un singolo punto vale 0:

$$\int_0^0 f(x)\, dx = 0$$

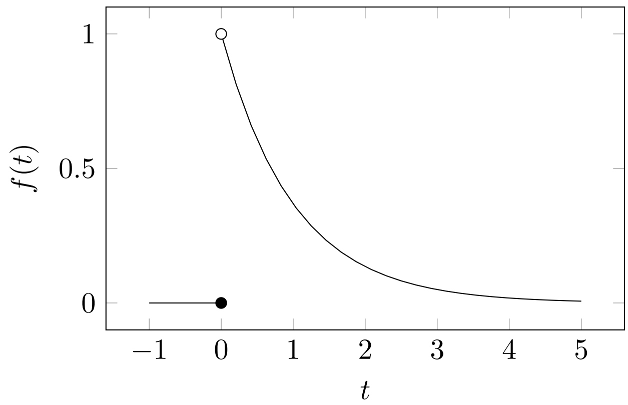
Più in generale, un integrale ha valore 0 su qualsiasi insieme $A$ di *misura nulla*[1] (si scrive $\int_A dx = 0$). Perciò, la densità di una variabile aleatoria continua viene definita *a meno di insiemi di misura nulla* (cioè "permettendosi di correggere" la derivata della funzione di ripartizione in, al più, un insieme di punti con misura nulla).

Così, in questo esempio, si può scegliere di porre $f(0) = 0$ (la scelta è arbitraria: come appena detto, essa non influenza il risultato), ottenendo la densità:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{se } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti } (t \leq 0) \end{cases}$$

[1] Oltre ai singoli punti, hanno misura nulla anche, ad esempio, i sottoinsiemi finiti e infiniti numerabili di $\mathbb{R}$.

Densità esponenziale per $\lambda = 1$, con $f(0) = 0$




Infine, per confermare che questa sia la densità di $X$, si verifica di riuscire effettivamente a ricostruire la funzione di ripartizione, mediante la seguente integrazione:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{t} f(x)\,dx \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} 0\,dx}_{=0} + \int_{0}^{t} \lambda e^{-\lambda x}\,dx \\
&= \lambda \int_{0}^{t} e^{-\lambda x}\,dx \\
&= \lambda \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_{0}^{t} \\
&= \lambda \left(\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda} - \frac{e^{-\lambda 0}}{-\lambda}\right) \\
&= \lambda \frac{e^{-\lambda t} - 1}{-\lambda} \\
&= \lambda \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda} \\
&= 1 - e^{-\lambda t} = F_X(t)
\end{aligned}
$$

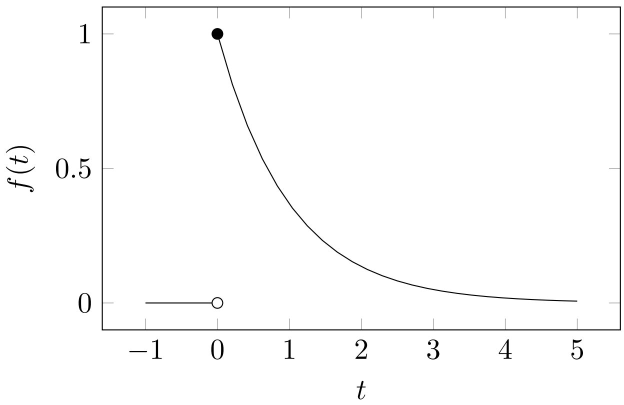
Come esempio di scelta alternativa, si potrebbe invece porre

$$f(0) = \lim_{t \to 0^+} \lambda e^{-\lambda t} = \lambda e^{-\lambda 0} = \lambda$$

ottenendo allora la densità

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti } (t < 0) \end{cases}$$

Densità esponenziale per $\lambda = 1$, con $f(0) = \lambda$




del tutto equivalente alla precedente (in quanto diversa solo nel singolo punto $t = 0$, cioè in un insieme di misura nulla).

*Nota*: Anche con la definizione a meno di insiemi di misura nulla, non tutte le funzioni di ripartizione (e quindi non tutte le variabili aleatorie) continue ammettono una densità. Si dicono **assolutamente continue** le variabili aleatorie continue che hanno una densità.

## 3 Definizione e proprietà delle densità

*Definizione*: Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice **densità** (**di probabilità**) se e solo se:

1. $f(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$
2. $f$ è integrabile su $\mathbb{R}$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

*Osservazione*: Le proprietà 1 e 3 sono analoghe a quelle delle densità discrete ($p(x_i) \geq 0\ \forall x_i$ e $\sum_{x_i} p(x_i) = 1$).

Una variabile aleatoria $X$ con funzione di ripartizione $F_X(t)$ ha densità $f$ se

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$$

Allora, si può calcolare direttamente mediante l'integrazione di $f$ anche la probabilità di un evento $\{a \leq X \leq b\}$ (o, più generale, la probabilità che $X$ assuma un valore compreso in un intervallo di $\mathbb{R}$ di tipo qualsiasi: siccome $X$ è continua, $P\{X = a\} = P\{X = b\} = 0$, quindi non c'è differenza tra $<$ e $\leq$):

$$
\begin{aligned}
P\{a \leq X \leq b\} &= P\{X \leq b\} - P\{X < a\} \\
&= P\{X \leq b\} - P\{X \leq a\} \\
&= F_X(b) - F_X(a) \\
&= \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx + \int_{a}^{-\infty} f(x)\,dx \\
&= \int_{a}^{b} f(x)\,dx
\end{aligned}
$$

La densità $f$ associata a una variabile aleatoria continua non è unica. Infatti, se $A$ è un insieme di misura nulla ($\int_A dx = 0$), e $g$ è una funzione che differisce da $f$ solo per punti in $A$, allora

$$
\int_{-\infty}^{t} g(x)\,dx = \int_{(-\infty,t)\cap A^c} g(x)\,dx = \int_{(-\infty,t)\cap A^c} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = F_X(t)
$$

cioè anche $g$ è una densità per $X$ (e questo "giustifica" la definizione delle densità a meno di insiemi di misura nulla).

# 4 Problema: legge di $X^2$

*Problema*: Sia $X$ una variabile aleatoria continua di densità $f$ (e funzione di ripartizione $F$). Calcolare la legge di $X^2$.

Per prima cosa, si determina che la funzione di ripartizione di $X^2$ è

$$
G(t) = P\{X^2 \leq t\} = P\{-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}\} = F(\sqrt{t}) - F(-\sqrt{t}) \qquad t \geq 0
$$

(e $G(t) = 0$ per $t < 0$, poiché l'elevamento al quadrato di un numero reale non può dare un risultato negativo).

Poi, con l'obiettivo di ricavare la densità di $X^2$, si calcola la derivata di $G(t)$:

$$
\begin{aligned}
g(t) = G'(t) &= \frac{d}{dt}\big(F(\sqrt{t}) - F(-\sqrt{t})\big) \\
&= F'(\sqrt{t})\,\frac{d}{dt}\sqrt{t} - F'(-\sqrt{t})\,\frac{d}{dt}(-\sqrt{t}) \\
&= f(\sqrt{t})\frac{1}{2\sqrt{t}} - f(-\sqrt{t})(-\frac{1}{2\sqrt{t}}) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{t}}\big(f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})\big) \qquad t > 0
\end{aligned}
$$

(e $g(t) = 0$ per $t \leq 0$). Non è però garantito che $g$ sia effettivamente la densità di $X^2$. Per verificarlo, si conferma che, integrando, si riottiene $G$:

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{t} g(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{2\sqrt{x}}\big(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\big)\,dx \\
&= \int_{0}^{t} \frac{1}{2\sqrt{x}}\big(f(\sqrt{x}) + f(-\sqrt{x})\big)\,dx \\
&= \int_{0}^{\sqrt{t}} \big(f(u) + f(-u)\big)\,du & u &= \sqrt{x} \\
& & du &= \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \\
&= \int_{0}^{\sqrt{t}} f(u)\,du + \int_{0}^{\sqrt{t}} f(-u)\,du \\
&= \int_{0}^{\sqrt{t}} f(u)\,du + \int_{0}^{-\sqrt{t}} f(v)(-dv) & v &= -u \\
& & dv &= -du \\
&= \int_{0}^{\sqrt{t}} f(u)\,du - \int_{0}^{-\sqrt{t}} f(v)\,dv \\
&= \int_{0}^{\sqrt{t}} f(u)\,du + \int_{-\sqrt{t}}^{0} f(v)\,dv \\
&= \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} f(u)\,du \\
&= F(\sqrt{t}) - F(-\sqrt{t}) \\
&= P\{-\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t}\} \\
&= P\{X^2 \leq t\} = G(t)
\end{aligned}
$$

# 5 Problema: condizionamento

*Problema*: Il tempo di vita $Y$ di un componente elettronico dipende dalla concentrazione di silicio $\lambda$ nel materiale di cui è fatto, secondo una legge esponenziale di parametro $\lambda$. Tuttavia, nel processo di produzione di questi componenti, non è possibile controllare la concentrazione di silicio, pertanto anch'essa può essere considerata una variabile aleatoria, $\Lambda$, che è uniformemente distribuita su $[0, 1]$ (cioè può assumere con uguale probabilità qualunque valore in tale intervallo). Determinare la legge di $Y$.

I dati del problema indicano la densità *condizionale* di $Y$, dato il valore di $\Lambda$:

$$
\bar{f}_{Y|\Lambda}(y \mid \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & \text{se } y \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}
$$

Inoltre, si conosce / ricava anche la densità marginale di $\Lambda$. Infatti, siccome $\Lambda$ ha una distribuzione uniforme su $[0, 1]$, la sua densità ha un valore costante $c > 0$ nell'intervallo, mentre vale 0 al di fuori di esso:

$$f_\Lambda(\lambda) = \begin{cases} c & \text{se } 0 \le \lambda \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Per le proprietà delle densità, l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\Lambda(\lambda)\, d\lambda = \int_0^1 c\, d\lambda = [c\lambda]_0^1 = c \cdot 1 - c \cdot 0 = c$$

deve valere 1, ovvero $c = 1$:

$$f_\Lambda(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \le \lambda \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora, si può calcolare la densità congiunta $f(y, \lambda)$, come nel caso discreto:

$$f(y, \lambda) = \bar{f}_{Y|\Lambda}(y \mid \lambda)\, f_\Lambda(\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & \text{se } y \ge 0 \text{ e } 0 \le \lambda \le 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Infine, per risolvere il problema, bisogna ricavare la densità marginale $f_Y(y)$. A tale scopo si usa (sempre come nel caso discreto) la formula della probabilità totale, integrando (perché, passando dal discreto al continuo, le somme diventano integrali) la densità congiunta su tutti i possibili valori di $\lambda$:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y, \lambda)\, d\lambda \\ &= \int_0^1 \lambda e^{-\lambda y}\, d\lambda \end{aligned}$$

Questo integrale si calcola per parti:

$$
\begin{aligned}
&= \big[g(\lambda)h(\lambda)\big]_0^1 - \int_0^1 g(\lambda)h'(\lambda)\,d\lambda \qquad && g'(\lambda) = e^{-\lambda y} \implies g(\lambda) = \frac{e^{-\lambda y}}{-y} \\
&= \left[\lambda \frac{e^{-\lambda y}}{-y}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{-\lambda y}}{-y}\,d\lambda && h(\lambda) = \lambda \implies h'(\lambda) = 1 \\
&= \frac{e^{-y}}{-y} - 0 + \frac{1}{y}\int_0^1 e^{-\lambda y}\,dy \\
&= \frac{e^{-y}}{-y} + \frac{1}{y}\left[\frac{e^{-\lambda y}}{-y}\right]_0^1 \\
&= \frac{e^{-y}}{-y} + \frac{1}{y}\left(\frac{e^{-y}}{-y} - \frac{1}{-y}\right) \\
&= \frac{ye^{-y}}{-y^2} + \frac{e^{-y}-1}{-y^2} \\
&= -\frac{1}{y^2}\big(ye^{-y} + e^{-y} - 1\big) \\
&= \frac{1}{y^2}\big(1 - ye^{-y} - e^{-y}\big) \qquad y \geq 0
\end{aligned}
$$

Quindi, la densità marginale di $Y$ è:

$$
f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2}(1 - ye^{-y} - e^{-y}) & \text{se } y \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}
$$

# 6 Indipendenza e densità condizionale

Come anticipato nel problema precedente, per le variabili aleatorie assolutamente continue è possibile “ripristinare” le definizioni di densità congiunta, indipendenza, densità condizionale, ecc. (e le relative proprietà) date nel caso discreto.

## 6.1 Indipendenza

*Definizione*: Due variabili aleatorie assolutamente continue $X$ e $Y$ si dicono **indipendenti** se e solo se

$$
P\{a \leq X \leq b,\ c \leq Y \leq d\} = P\{a \leq X \leq b\}\, P\{c \leq Y \leq d\} \quad \forall a \leq b,\ c \leq d
$$

Equivalentemente, $X$ e $Y$ sono indipendenti se e solo se

$$
f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}
$$

a meno di insiemi di misura nulla, ovvero, scritto in modo più preciso, se e solo se, per ogni insieme $A \subset \mathbb{R}^2$ tale che $\int_A dx\,dy \neq 0$, si ha

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \quad \forall (x,y) \in A$$

Come caso particolare, si dimostra che $X$ e $Y$ sono indipendenti se la loro densità congiunta può essere fattorizzata in un prodotto di funzioni di $x$ e $y$,

$$f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$$

dove $f_1$ e $f_2$ *non sono necessariamente* le densità marginali $f_X$ e $f_Y$.

Infatti, per le proprietà delle densità, deve valere

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

e, per ipotesi,

$$1 = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^2} f_1(x) f_2(y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y)\,dy$$

quindi si pongono

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,dx &= c \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y)\,dy &= \frac{1}{c} \end{aligned} \iff \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y)\,dy = c\frac{1}{c} = 1$$

Si ricavano poi le densità marginali, mediante integrazione su tutti i valori dell'altra variabile:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) f_2(y)\,dy \\ &= f_1(x) \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y)\,dy \\ &= c f_1(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx \\ &= f_2(y) \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,dx \\ &= \frac{1}{c} f_2(y) \end{aligned}$$

Allora, è soddisfatta la condizione di indipendenza $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$:

$$\begin{aligned} f_X(x)f_Y(y) &= cf_1(x) \cdot \frac{1}{c} f_2(y) \\ &= \frac{c}{c} f_1(x)f_2(y) \\ &= f_1(x)f_2(y) = f(x,y) \end{aligned}$$

### 6.2 Densità condizionale

*Definizione*: Date due variabili aleatorie assolutamente continue $X$ e $Y$, la **densità condizionale** di $X$ dato $Y = y$ è

$$\bar{f}_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

### 6.3 Indipendenza di funzioni

Come nel caso discreto, se $X_1, \dots, X_n$ sono variabili aleatorie assolutamente continue indipendenti $d_i$-dimensionali,

$$X_i = (X_{i1}, \dots, X_{id_i}) : \Omega \to \mathbb{R}^{d_i} \qquad i = 1, \dots, n$$

e $\phi_1, \dots, \phi_n$ sono delle applicazioni

$$\phi_i : \mathbb{R}^i \to \mathbb{R} \qquad i = 1, \dots, n$$

allora si può dimostrare che anche le variabili aleatorie $\phi_1(X_1), \dots, \phi_n(X_n)$[2] sono indipendenti.

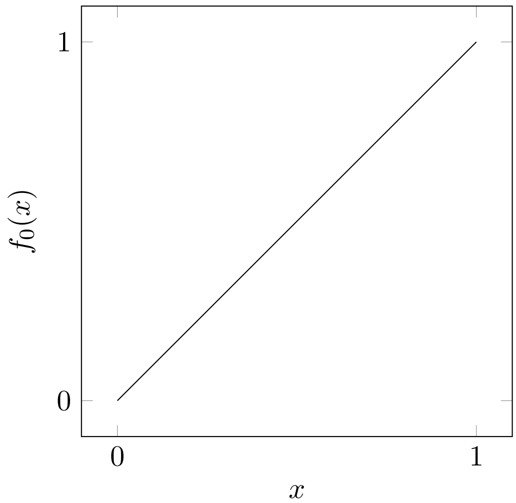
## 7 Cenni alla nozione generale di variabile aleatoria continua

Sono note in letteratura delle funzioni che sono continue ma non assolutamente continue. Un esempio tipico è il limite della successione di funzioni definita come segue:[3]

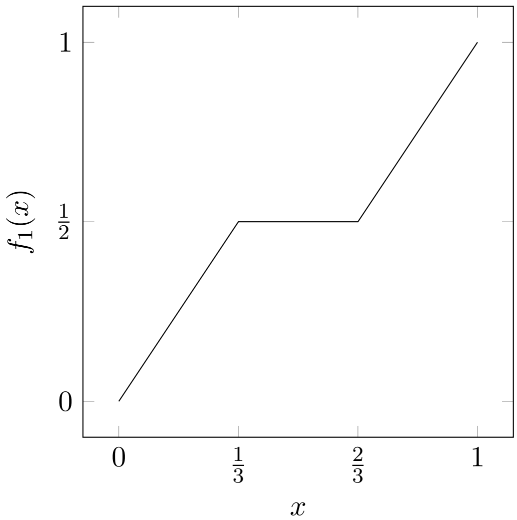
- Sia $f_0(x) = x$.

[2] A differenza di quanto avviene nel discreto, nel caso continuo non è tecnicamente garantito che una funzione di una variabile aleatoria sia essa stessa una variabile aleatoria, ma, nei casi considerati in pratica, ciò è quasi sempre vero.

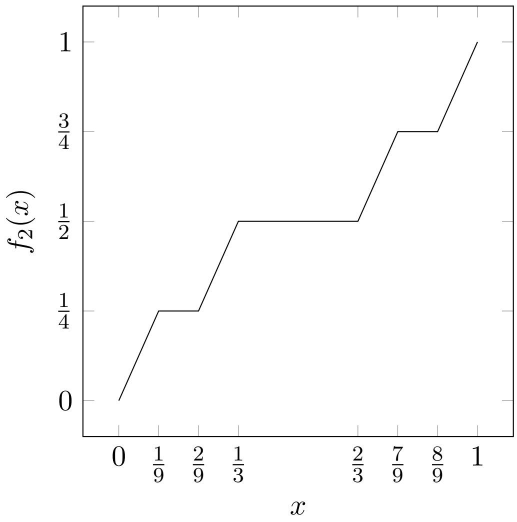
[3] Storicamente, questa stessa funzione è stata definita in modi diversi (da Cantor, Vitali e altri).




- Sia $f_1(x)$ la funzione il cui grafico è la poligonale ottenuta a partire da $f_0(x)$, suddividendo in tre parti uguali l'intervallo $[0,1]$, assegnando alla funzione il valore costante $\frac{1}{2}$ in $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$ e definendo due segmenti con pendenza $\frac{3}{2}$ per congiungere la parte costante a $(0,0)$ e $(1,1)$.




- Sia $f_2(x)$ la funzione il cui grafico è la poligonale ottenuta applicando la stessa suddivisione del passo precedente agli intervalli in cui $f_1(x)$ non è costante.




- In generale, ripetendo la suddivisione, si ha che $f_n(x)$ è una funzione crescente, il cui grafico è la poligonale avente $2^{n+1} - 1$ segmenti: $2^n$ segmenti sono obliqui di pendenza $(\frac{3}{2})^n$, mentre gli altri $2^n - 1$ segmenti sono orizzontali, ciascuno di lunghezza $(\frac{1}{3})^n$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta $f_n(0) = 0$ e $f_n(1) = 1$.

Questa successione converge a una funzione continua avente derivata 0, tranne che in un insieme a misura nulla, dove non è derivabile. Allora, si altera la derivata, ponendola a un valore arbitrario dove la funzione non è derivabile (e lasciandola a 0 altrove). Si ottiene così una derivata il cui integrale è 0 (perché tale derivata può avere valore $\neq 0$ solo in un insieme a misura nulla, che quindi non influenza l'integrale), e non la funzione di partenza. Perciò, una variabile aleatoria continua che ha questa come funzione di ripartizione non ammette una densità.