Azzolini Riccardo 2019-03-11

Limiti di funzioni elementari e limiti notevoli

1 Limiti di potenze

$$f(x) = x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

- Se $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 > 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} x^\alpha = x_0^\alpha$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$

Osservazione: Siccome l'esponente α è reale, si possono considerare in generale solo i limiti per i quali x è definitivamente positiva.

2 Limiti di esponenziali

$$f(x) = a^x, \quad a > 0$$

- Se $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0^+ & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0^+ & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$

3 Limiti di logaritmi

$$f(x) = \log_a x, \quad a > 0,\, a \neq 1$$

- Se $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 > 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a x = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < a < 1 \end{cases}$

4 Limiti di funzioni trigonometriche

- Se $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$
- Se $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$
- Se $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $\lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0$
- $\lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{2} + k\pi)^-} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{2} + k\pi)^+} = -\infty$

5 Limiti di funzioni trigonometriche inverse

- Se $x_0 \in [-1, 1]$, $\lim\limits_{x \to x_0} \arcsin x = \arcsin x_0$
- Se $x_0 \in [-1, 1]$, $\lim\limits_{x \to x_0} \arccos x = \arccos x_0$
- Se $x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{2}$

6 Limite di una funzione composta

Teorema: Siano $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$, tali che $f(X) \subseteq Y$, e sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$ di accumulazione per X. Se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \qquad \lim_{y \to l} g(y) = k$$

e inoltre

- $f(x) \neq l$ definitivamente per $x \to x_0$, oppure $l \in Y$ e $g(l) = k$,
- $l \in \mathbb{R}^*$ è di accumulazione per Y,

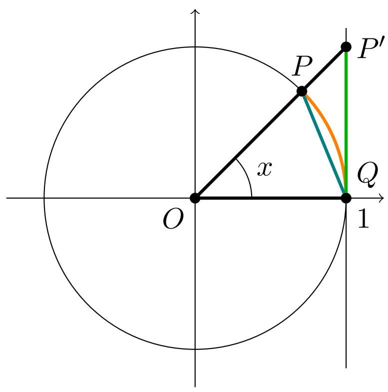
allora

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = k$$

7 Limiti notevoli di funzioni trigonometriche

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Dimostrazione: Sia $0 < x < \frac{\pi}{2}$.



- Il triangolo OPQ ha base 1 e altezza $\sin x$, quindi la sua area è

$$\frac{1 \cdot \sin x}{2} = \frac{\sin x}{2}$$

- Il settore circolare OPQ, di raggio 1 e ampiezza x, ha area

$$\frac{1^2 \cdot x}{2} = \frac{x}{2}$$

- Il triangolo $OP'Q$ ha base 1 e altezza $\operatorname{tg} x$, e di conseguenza area

$$\frac{1 \cdot \operatorname{tg} x}{2} = \frac{\sin x}{2 \cos x}$$

Poiché queste regioni sono contenute una nell'altra, si ha che

$$\frac{\sin x}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\sin x}{2 \cos x}$$

o, moltiplicando per 2,

$$\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$$

Siccome $\sin x > 0$ e $\cos x > 0$ per $0 < x < \frac{\pi}{2}$, si può dividere per $\sin x$

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$$

e fare il reciproco, invertendo la direzione delle disuguaglianze:

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

Allora, per il teorema del confronto, dato che

$$\lim_{x \to 0^+} \cos x = 1$$

deve essere anche

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Inoltre, la funzione $\dfrac{\sin x}{x}$ è pari

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}$$

quindi

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$$

cioè

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \square$$

7.1 Limiti notevoli derivati

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

  Dimostrazione:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x}\\ &= 1^2\cdot\frac{1}{1+1}\\ &= \frac{1}{2} \qquad \square\end{aligned}$$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$

  Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\\
&= 1\cdot\frac{1}{1}\\
&= 1 \qquad \square
\end{aligned}$$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1$

  Dimostrazione: Sia $y = \arcsin x \iff x = \sin y$. Se $x \to 0$, allora $y \to 0$, e quindi

$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\sin y}{y}} = 1 \qquad \square$$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

  Dimostrazione: Sia $y = \operatorname{arctg} x \iff x = \operatorname{tg} y$. Se $x \to 0$, allora $y \to 0$, e quindi

$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg} y} = \lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\operatorname{tg} y}{y}} = 1 \qquad \square$$

8 Limiti notevoli di esponenziali e logaritmi

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Dimostrazione: Si suppone di sapere (senza dimostrarlo) che, per $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to +\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Sia $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Allora $[x] \in \mathbb{N}$ e

$$\begin{gathered}
[x] \le x \le [x]+1\\
\frac{1}{[x]+1} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{[x]}
\end{gathered}$$

$$1+\frac{1}{[x]+1} \le 1+\frac{1}{x} \le 1+\frac{1}{[x]}$$
$$\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \le \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$$

(quest'ultimo passaggio è valido perché gli esponenti sono in ordine crescente).

Poiché

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} &= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1-1}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+1}}_{e}\underbrace{\left(1+\frac{1}{[x]+1}\right)^{-1}}_{1}\\
&= e\\
\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} &= \lim_{x\to+\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]}}_{e}\underbrace{\left(1+\frac{1}{[x]}\right)}_{1}\\
&= e
\end{aligned}$$

per il teorema del confronto si ha che

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \qquad \square$$

8.1 Limiti notevoli derivati

- $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$

  Dimostrazione: Sia $y=-x \iff x=-y$. Se $x\to-\infty$, allora $y\to+\infty$, quindi

$$
\begin{aligned}
\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} &= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} \\
&= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} \\
&= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^{y} \\
&= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y} \\
&= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1+1} \\
&= \lim_{y\to+\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}}_{e}\underbrace{\left(1+\frac{1}{y-1}\right)}_{1} \\
&= e \qquad \square
\end{aligned}
$$

- In generale, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{x} = e^{a} \quad \forall a \in \mathbb{R}$

  Dimostrazione: Sia $\frac{1}{y}=\frac{a}{x} \iff x = ay$. Se $x\to\pm\infty$, allora $y\to\pm\infty$, e quindi

  $$\lim_{y\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{ay} = \lim_{y\to\pm\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{a} = e^{a} \qquad \square$$

- $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

  Dimostrazione: Sia $y=\frac{1}{x} \iff x=\frac{1}{y}$.

  - Se $x\to 0^{+}$, allora $y\to+\infty$, e

    $$\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e$$

  - Se invece $x\to 0^{-}$, allora $y\to-\infty$, e

    $$\lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e$$

  Quindi $\lim\limits_{x\to 0^{+}}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^{-}}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. $\square$

- $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

  Dimostrazione:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\log(1+x) = \lim_{x\to 0} \log(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log e = 1 \qquad \square$$

- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

  Dimostrazione: Sia $y = e^x - 1 \iff x = \log(y+1)$. Se $x \to 0$, allora $y \to 0$, e quindi

$$\lim_{y\to 0} \frac{y}{\log(y+1)} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\log(y+1)}{y}} = 1 \qquad \square$$

- $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

  Dimostrazione: $(1+x)^\alpha = e^{\log(1+x)^\alpha} = e^{\alpha\log(1+x)}$, quindi

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha\log(1+x)} - 1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha\log(1+x)} - 1}{\alpha\log(1+x)} \cdot \frac{\alpha\log(1+x)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha\log(1+x)} - 1}{\alpha\log(1+x)} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\alpha\log(1+x)}{x}}_{\alpha}\end{aligned}$$

  Sia $y = \alpha\log(1+x)$. Se $x \to 0$, $y \to 0$, e allora

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha\log(1+x)} - 1}{\alpha\log(1+x)} = \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1 \qquad \square$$

9 Generalizzazione dei limiti notevoli

Se, per $x \to x_0 \in \mathbb{R}^*$, $f(x) \to 0$, allora

- $\lim_{x\to x_0} \frac{\sin f(x)}{f(x)} = 1$
- $\lim_{x\to x_0} \frac{1-\cos f(x)}{(f(x))^2} = \frac{1}{2}$

- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\operatorname{tg} f(x)}{f(x)} = 1$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\arcsin f(x)}{f(x)} = 1$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\operatorname{arctg} f(x)}{f(x)} = 1$
- $\lim\limits_{x \to x_0} (1 + f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\log(1 + f(x))}{f(x)} = 1$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{e^{f(x)} - 1}{f(x)} = 1$
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{(1 + f(x))^{\alpha} - 1}{f(x)} = \alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$