Azzolini Riccardo 2020-05-28

Tableaux del primo ordine

1 Semplificazione dei linguaggi considerati

Per semplificare la presentazione e le dimostrazioni, si considerano inizialmente linguaggi del primo ordine in cui *non ci sono simboli di funzione*:

- l'alfabeto consiste di variabili, costanti e predicati, mentre l'insieme dei simboli di funzione è vuoto;
- i termini sono solo variabili o costanti.

Più avanti, si vedrà come modificare le regole del calcolo per trattare anche i simboli di funzione.

2 Regole

Il calcolo a tableaux per la logica del primo ordine, $\mathrm{T_{CFO}}$, estende il calcolo a tableaux per la logica proposizionale, $\mathrm{T_{CPL}}$, dal quale "eredita" le regole relative ai connettivi:

- Regole per $\land, \lor, \to$:

$$\frac{\Gamma, A \land B}{\Gamma, A, B}\land \qquad \frac{\Gamma, A \lor B}{\Gamma, A \mid \Gamma, B}\lor \qquad \frac{\Gamma, A \to B}{\Gamma, \neg A \mid \Gamma, B}\to$$

- Regole per $\neg\land, \neg\lor, \neg\to$:

$$\frac{\Gamma, \neg(A \land B)}{\Gamma, \neg A \mid \Gamma, \neg B}\neg\land \qquad \frac{\Gamma, \neg(A \lor B)}{\Gamma, \neg A, \neg B}\neg\lor \qquad \frac{\Gamma, \neg(A \to B)}{\Gamma, A, \neg B}\neg\to$$

- Regola per $\neg\neg$:

$$\frac{\Gamma, \neg\neg A}{\Gamma, A}\neg\neg$$

Oltre a queste, $\mathrm{T_{CFO}}$ introduce quattro nuove regole per i quantificatori:

- La regola per il quantificatore universale,

$$\frac{\Gamma, \forall x A}{\Gamma, \forall x A, A[c/x]} \forall$$

afferma che, se la premessa contiene la formula $\forall x A$, allora la conclusione *contiene ancora* $\forall x A$, e, in più, contiene un'istanza di A costruita su una qualunque costante c.

- La regola per il quantificatore esistenziale,

$$\frac{\Gamma, \exists x A}{\Gamma, A[a/x]} \exists$$

sostituisce $\exists x A$ con un'istanza di A, $A[a/x]$, dove la costante a (detta anche *parametro*) è una costante *nuova*, cioè non compare nell'alfabeto iniziale, né nel tableau nel quale si sta applicando la regola.

- Le regole per $\neg\forall$ e $\neg\exists$ sono duali a quelle appena introdotte:

$$\frac{\Gamma, \neg\forall x A}{\Gamma, \neg A[a/x]} \neg\forall \qquad \frac{\Gamma, \neg\exists x A}{\Gamma, \neg\exists x A, \neg A[c/x]} \neg\exists$$

2.1 Esempio

Dato l'insieme $\Gamma = \{\neg(\forall x \neg P(x) \to \neg\exists x P(x))\}$, si costruisce ad esempio il seguente tableau, seguendo un procedimento analogo al caso proposizionale (ma considerando anche le regole per i quantificatori).

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg(\forall x \neg P(x) \to \neg\exists x P(x))}{\forall x \neg P(x), \neg\neg\exists x P(x)} \neg\to}{\forall x \neg P(x), \neg\neg\exists x P(x), \neg P(a)} \forall}{\forall x \neg P(x), \exists x P(x), \neg P(a)} \neg\neg}{\forall x \neg P(x), \neg P(a), P(b)} \exists}{\forall x \neg P(x), \neg P(a), P(b), \neg P(b)} \forall$$

Per l'applicazione della regola $\forall$, si suppone che l'alfabeto contenga il simbolo di costante a. Invece, la b utilizzata nell'applicare la regola $\exists$ è una nuova costante; una volta introdotta, essa può essere utilizzata anche nella successiva applicazione della regola $\forall$.

L'insieme di formule nella foglia del tableau contiene $P(b)$ e $\neg P(b)$: si vedrà in seguito che ciò rende chiuso il tableau, e questo significa, come nel caso proposizionale, che l'insieme Γ è insoddisfacibile. Infatti, sapendo che i due argomenti dell'implicazione sono logicamente equivalenti, si determina immediatamente che la formula

$$\varphi = \forall x \neg P(x) \to \neg\exists x P(x)$$

è valida, dunque $\neg\varphi$ (e quindi $\Gamma = \{\neg\varphi\}$) deve appunto essere insoddisfacibile.

2.2 Classificazione

Le regole per i quantificatori sono classificate in due famiglie:

- **γ-regole**:
$$\frac{\Gamma, \forall x A}{\Gamma, \forall x A, A[c/x]}\ \forall \qquad \frac{\Gamma, \neg\exists x A}{\Gamma, \neg\exists x A, \neg A[c/x]}\ \neg\exists$$
quelle in cui la costante c introdotta nella conclusione è una qualunque costante già presente nell'alfabeto del tableau;

- **δ-regole**:
$$\frac{\Gamma, \neg\forall x A}{\Gamma, \neg A[a/x]}\ \neg\forall \qquad \frac{\Gamma, \exists x A}{\Gamma, A[a/x]}\ \exists$$
quelle in cui si introduce una costante a nuova.

3 Correttezza intuitiva delle regole

Come fatto per il caso proposizionale, l'obiettivo sarà mostrare che il calcolo a tableaux per la logica classica del primo ordine è corretto (valido) e completo.

Per ora, è utile ragionare intuitivamente sulla correttezza delle regole relative ai quantificatori, al fine di comprendere lo scopo dei vincoli sui simboli di costante con cui si costruiscono le conclusioni di tali regole.

Mostrare che una regola è corretta significa far vedere che essa preserva la soddisfacibilità della premessa.

3.1 Correttezza delle γ-regole

Si consideri la regola per il $\forall$:
$$\frac{\Gamma, \forall x A}{\Gamma, \forall x A, A[c/x]}\ \forall$$
Se un modello $\mathcal{M}$ soddisfa la premessa, $\mathcal{M} \models \Gamma \cup \{\forall x A\}$, allora A è vera in $\mathcal{M}$ qualunque sia l'elemento del dominio in cui si mappa la variabile x. Perciò, dato che ogni costante c è mappata in un elemento del dominio di $\mathcal{M}$, si ha anche che $\mathcal{M} \models A[c/x]$, ovvero $\mathcal{M} \models \Gamma \cup \{\forall x A, A[c/x]\}$: la conclusione della regola è soddisfacibile.

Il caso della regola $\neg\exists$ è del tutto analogo.

3.2 Correttezza delle δ-regole

Si consideri il caso della regola $\exists$ ($\neg\forall$ è analogo):

$$\frac{\Gamma, \exists x A}{\Gamma, A[a/x]}\ \exists$$

essa formalizza un modo di argomentare che è tipico in matematica.

Si suppone di aver dimostrato che esiste un elemento x per cui vale una proprietà A. Allora, si può dire "sia a un tale x", e scrivere $A[a/x]$. In pratica, si decide di denotare con il simbolo a uno specifico elemento che soddisfa la proprietà A, e dunque, nel seguito del ragionamento, si considera l'istanza della proprietà relativa a tale elemento, $A[a/x]$.

Con questo ragionamento, se $\exists x A$ è soddisfacibile allora lo è anche $A[a/x]$, quindi la regola è (intuitivamente) corretta.

Rimane da motivare il fatto che la costante debba essere nuova. Dopo aver dimostrato che esiste un elemento x per cui vale A, e chiamato a tale elemento, si suppone di mostrare anche che esiste un x per cui vale un'altra proprietà B. Adesso, dire ancora "sia a un tale x" non sarebbe corretto, perché così facendo si affermerebbe che l'elemento per cui valgono separatamente A e B è lo stesso. Perciò, al fine di garantire la correttezza del ragionamento, bisogna invece dire "sia b un tale x", dove b è un nuovo simbolo di costante.

4 Classificazione delle formule

Nel caso proposizionale, dalla classificazione delle regole si era ricavata una corrispondente classificazione delle formule a cui esse si applicano:

- **$\boldsymbol{\alpha}$-formule**:

α-formula	Ridotti	
$A \wedge B$	A	B
$\neg(A \vee B)$	$\neg A$	$\neg B$
$\neg(A \to B)$	A	$\neg B$

- **$\boldsymbol{\beta}$-formule**:

β-formula	Ridotti	
$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$
$A \vee B$	A	B
$A \to B$	$\neg A$	B

Per la logica del primo ordine, questa classificazione viene estesa alle formule quantificate:

- **γ-formule**:

γ-formula	Ridotti
$\forall x A$	$A[c/x]$
$\neg\exists x A$	$\neg A[c/x]$

(dove, nei ridotti, c è una costante qualunque).

- **δ-formule**:

δ-formula	Ridotti
$\neg\forall x A$	$\neg A[a/x]$
$\exists x A$	$A[a/x]$

(dove, nei ridotti, a è un parametro, ovvero una costante nuova).

5 Costruzione di un albero di prova

Un albero di prova (un tableau) per un inseme finito di formule Γ è ottenuto applicando una serie di passi di espansione a partire da un albero che consiste della sola radice, alla quale è associato l'insieme Γ. Tale processo genera una sequenza di alberi:

$$\mathcal{T}_0, \mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n, \dots$$

- $\mathcal{T}_0$ è appunto l'albero che consiste del solo nodo N, con etichetta $\Gamma_N = \Gamma$.
- $\mathcal{T}_{i+1}$ è ottenuto a partire dall'albero $\mathcal{T}_i$:
  1. si seleziona una sua foglia N di $\mathcal{T}_i$ il cui insieme associato Γ_N contiene almeno una formula che non sia un letterale;
  2. si seleziona una formula $H \in \Gamma_N$ tra quelle che non sono letterali;
  3. $\mathcal{T}_{i+1}$ è generato dal passo di espansione Espandi$(\mathcal{T}_i, N, H)$, che corrisponde all'applicazione all'insieme Γ_N della regola per la formula H.

Il passo di espansione nel caso dei connettivi è quello già definito per i tableaux proposizionali, quindi adesso è sufficiente considerare i casi relativi alle formule quantificate:

- Se H è una γ-formula e K è un suo ridotto, allora $\mathcal{T}_{i+1}$ si costruisce aggiungendo un nodo N' come successore (figlio) di N, e ponendo:

  $$\Gamma_{N'} = \Gamma_N \cup \{K\}$$

  Osservazione: La formula H a cui si applica la regola viene "ricopiata" nel nuovo nodo.

- Se H è una δ-formula e K è un suo ridotto, allora $\mathcal{T}_{i+1}$ si costruisce aggiungendo un nodo N' come successore (figlio) di N, e ponendo:

  $$\Gamma_{N'} = (\Gamma_N \setminus \{H\}) \cup \{K\}$$

5.1 Esempi

- Il tableau costruito prima,

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg(\forall x \neg P(x) \to \neg\exists x P(x))}{\forall x \neg P(x), \neg\neg\exists x P(x)}\,\neg\to}{\forall x \neg P(x), \neg\neg\exists x P(x), \neg P(a)}\,\forall}{\forall x \neg P(x), \exists x P(x), \neg P(a)}\,\neg\neg}{\forall x \neg P(x), \neg P(a), P(b)}\,\exists}{\forall x \neg P(x), \neg P(a), P(b), \neg P(b)}\,\forall$$

  corrisponde alla seguente rappresentazione ad albero (che ha un solo ramo, perché non sono state applicate β-regole):

$$\begin{array}{c}
\neg(\forall x \neg P(x) \to \neg\exists x P(x)) \\
\big|\ {\scriptstyle \neg\to} \\
\forall x \neg P(x), \neg\neg\exists x P(x) \\
\big|\ {\scriptstyle \forall} \\
\forall x \neg P(x), \neg\neg\exists x P(x), \neg P(a) \\
\big|\ {\scriptstyle \neg\neg} \\
\forall x \neg P(x), \exists x P(x), \neg P(a) \\
\big|\ {\scriptstyle \exists} \\
\forall x \neg P(x), \neg P(a), P(b) \\
\big|\ {\scriptstyle \forall} \\
\forall x \neg P(x), \neg P(a), P(b), \neg P(b)
\end{array}$$

- Per la formula

$$\neg(\exists x(P(x) \lor Q(x)) \to \exists x P(x) \lor \exists x Q(x))$$

  si costruisce il seguente albero di prova:

$$\neg(\exists x(P(x) \vee Q(x)) \to \exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$$

$$\Big| \, {\scriptstyle \neg\to}$$

$$\exists x(P(x) \vee Q(x)), \neg(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$$

$$\Big| \, {\scriptstyle \neg\vee}$$

$$\exists x(P(x) \vee Q(x)), \neg\exists x P(x), \neg\exists x Q(x)$$

$$\Big| \, {\scriptstyle \exists}$$

$$P(a) \vee Q(a), \neg\exists x P(x), \neg\exists x Q(x)$$

$${\scriptstyle \vee}$$

$$\begin{array}{cc}
P(a), \neg\exists x P(x), \neg\exists x Q(x) & P(a), \neg\exists x P(x), \neg\exists x Q(x) \\
\Big| \, {\scriptstyle \neg\exists} & \Big| \, {\scriptstyle \neg\exists} \\
P(a), \neg\exists x P(x), \neg P(a), \neg\exists x Q(x) & P(a), \neg\exists x P(x), \neg\exists x Q(x), \neg Q(a)
\end{array}$$

Anche questo (come l'esempio precedente) contiene coppie complementari in tutte le foglie, quindi è chiuso, e perciò la formula alla radice è insoddisfacibile.

6 Rango

Definizione: Il **rango** $\mathrm{rg}(\varphi)$ di una formula φ è così definito:

$$\mathrm{rg}(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{se } \varphi \text{ è un letterale} \\ \mathrm{rg}(\psi) + 1 & \text{se } \varphi = \neg\neg\psi \\ \mathrm{rg}(\psi_1) + \mathrm{rg}(\psi_2) + 1 & \text{se } \varphi \text{ è un'}\alpha\text{-formula o } \beta\text{-formula con ridotti } \psi_1, \psi_2 \\ \mathrm{rg}(\psi) + 1 & \text{se } \varphi \text{ è una } \gamma\text{-formula o } \delta\text{-formula con ridotto } \psi \end{cases}$$

Questa definizione estende semplicemente quella data nel caso proposizionale, dal quale si conserva anche la definizione di rango di un insieme.

Definizione: Il rango $\mathrm{rg}(\Gamma)$ di un insieme finito di formule Γ è così definito:

$$\mathrm{rg}(\Gamma) = \sum_{H \in \Gamma} \mathrm{rg}(H)$$

6.1 Esempio

$$
\begin{aligned}
\mathrm{rg}\Big(&\neg\big(\exists x(P(x)\vee Q(x))\to\exists xP(x)\vee\exists xQ(x)\big)\Big)\\
&=\mathrm{rg}\big(\exists x(P(x)\vee Q(x))\big) \qquad +\mathrm{rg}\big(\neg(\exists xP(x)\vee\exists xQ(x))\big) \qquad +1\\
&=\mathrm{rg}(P(a)\vee Q(a)) \qquad +1+\mathrm{rg}(\neg\exists xP(x))+\mathrm{rg}(\neg\exists xQ(x))+1+1\\
&=\mathrm{rg}(P(a))+\mathrm{rg}(Q(a))+1+1+\mathrm{rg}(P(b))+1\ +\mathrm{rg}(Q(c))+1\ +1+1\\
&=1 \qquad +1 \qquad +1+1+1 \qquad +1\ +1 \qquad +1\ +1+1\\
&=10
\end{aligned}
$$

7 Problema della terminazione

Per le regole proposizionali, la conclusione Δ' è sempre "più semplice" della premessa Δ – formalmente, $\mathrm{rg}(\Delta') < \mathrm{rg}(\Delta)$. Per questo motivo, i rami di un tableau per formule che non contengono quantificatori sono sempre finiti.

Invece, nel caso delle γ-regole,

$$
\frac{\Gamma, \forall xA}{\Gamma, \forall xA, A[c/x]}\,\forall \qquad \frac{\Gamma, \neg\exists xA}{\Gamma, \neg\exists xA, \neg A[c/x]}\,\neg\exists
$$

siccome la formula a cui esse si applicano viene copiata nella conclusione Δ', quest'ultima contiene tutte le formule della premessa più una nuova, dunque *non* è "più semplice" della premessa Δ: $\mathrm{rg}(\Delta') > \mathrm{rg}(\Delta)$. Allora, l'applicazione delle regole $\forall$ e $\neg\exists$ (eventualmente combinate con $\exists$ e $\neg\forall$) può dar luogo a rami infiniti.

7.1 Esempio

Si consideri la formula

$$\forall x\exists yP(x,y)$$

e si supponga che l'alfabeto contenga una costante a.

1. Siccome la formula è una γ-formula, si applica la regola che introduce nella conclusione un ridotto ottenuto sostituendo la variabile quantificata universalmente (x) con una costante dell'alfabeto (a):

$$
\begin{array}{c}
\forall x\exists yP(x,y)\\
\big|\,\forall\\
\forall x\exists yP(x,y), \exists yP(a,y)
\end{array}
$$

2. Successivamente, si sceglie di applicare una regola alla δ-formula ricavata al passo precedente. Ciò comporta l'introduzione di una nuova costante, b:

$$\begin{array}{c} \forall x \exists y P(x,y) \\ \Big| \; \forall \\ \forall x \exists y P(x,y), \exists y P(a,y) \\ \Big| \; \exists \\ \forall x \exists y P(x,y), P(a,b) \end{array}$$

3. Adesso, la nuova costante b può essere usata per istanziare nuovamente il $\forall x$, applicando ancora la γ-regola già usata in precedenza:

$$\begin{array}{c} \forall x \exists y P(x,y) \\ \Big| \; \forall \\ \forall x \exists y P(x,y), \exists y P(a,y) \\ \Big| \; \exists \\ \forall x \exists y P(x,y), P(a,b) \\ \Big| \; \forall \\ \forall x \exists y P(x,y), P(a,b), \exists y P(b,y) \end{array}$$

4. A questo punto si può applicare di nuovo la δ-regola per il quantificatore esistenziale, introducendo un'altra costante nuova c:

$$\begin{array}{c} \forall x \exists y P(x,y) \\ \Big| \; \forall \\ \forall x \exists y P(x,y), \exists y P(a,y) \\ \Big| \; \exists \\ \forall x \exists y P(x,y), P(a,b) \\ \Big| \; \forall \\ \forall x \exists y P(x,y), P(a,b), \exists y P(b,y) \\ \Big| \; \exists \\ \forall x \exists y P(x,y), P(a,b), P(b,c) \end{array}$$

5. Ancora una volta, si ha una nuova costante per istanziare il $\forall x$, generando la δ-formula $\exists y P(c,y)$, per la quale si introduce poi un'ulteriore costante, a sua volta usata per istanziare il $\forall x$, e così via.

$$
\begin{array}{c}
\forall x \exists y P(x,y) \\
\Big|\ \forall \\
\forall x \exists y P(x,y), \exists y P(a,y) \\
\Big|\ \exists \\
\forall x \exists y P(x,y), P(a,b) \\
\Big|\ \forall \\
\forall x \exists y P(x,y), P(a,b), \exists y P(b,y) \\
\Big|\ \exists \\
\forall x \exists y P(x,y), P(a,b), P(b,c) \\
\Big|\ \forall \\
\forall x \exists y P(x,y), P(a,b), P(b,c), \exists y P(c,y) \\
\vdots
\end{array}
$$

Il procedimento può continuare all'infinito, senza mai generare una coppia complementare (quindi senza un criterio in base al quale fermarsi).