Azzolini Riccardo 2019-04-10

L'Hôpital

1 Teorema dell'Hôpital

Teorema: Siano $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in (a, b), con $a, b \in \mathbb{R}^*$ e $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$, tali che i limiti

$$\lim_{\substack{x\to a^+\\(x\to b^-)\\(x\to x_0)}} f(x) \qquad \lim_{\substack{x\to a^+\\(x\to b^-)\\(x\to x_0)}} g(x)$$

siano entrambi 0 o ∞ (anche due infiniti di segno diverso). Se

$$\exists \lim_{\substack{x\to a^+\\(x\to b^-)\\(x\to x_0)}} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}^*$$

allora

$$\lim_{\substack{x\to a^+\\(x\to b^-)\\(x\to x_0)}} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Osservazioni:

- Se non esiste il limite di $\frac{f'(x)}{g'(x)}$, può comunque esistere il limite di $\frac{f(x)}{g(x)}$. Ad esempio,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + \sin x}{x} \overset{\mathrm{H}}{\neq} \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \cos x}{1} = \lim_{x\to+\infty} (1 + \cos x) \nexists$$

  ma

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x} + \frac{\sin x}{x}\right) = 1 + 0 = 1$$

- Non sempre conviene applicare l'Hôpital. Ad esempio, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\sqrt[4]{x}}{\log(1+3x)\sqrt{\arctan x^2}}$$

si complicherebbe sostituendo numeratore e denominatore con le rispettive derivate. Esso si può risolvere più agevolmente mediante gli asintotici:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\sqrt[4]{x}}{\log(1+3x)\sqrt{\arctan x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\frac{1}{4}}}{3x\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\frac{1}{4}}}{3x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{3x^{\frac{7}{4}}} = +\infty$$

- Per applicare l'Hôpital più volte, bisogna verificare che il limite sia ancora una forma indeterminata $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

1.1 Esempi

- L'Hôpital permette di dimostrare che il logaritmo e l'esponenziale hanno ordine di infinito rispettivamente inferiore e superiore a qualsiasi potenza x^n $(n > 0)$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^n} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{nx^n} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} \overset{\text{H}}{=} \cdots \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{n!\,x^{n-n}} = +\infty$$

- $\lim_{x\to 0^+} x\log x$ è una forma indeterminata $0\cdot\infty$, ma si può trasformare in una forma $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to 0^+} x\log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{x^2}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

2 Corollario: calcolo della derivata sinistra/destra

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Se esiste finito

$$\lim_{\substack{x\to a^+ \\ (x\to b^-)}} f'(x)$$

allora

$$\lim_{\substack{x \to a^+ \\ (x \to b^-)}} f'(x) = f'_+(a) \;\; (f'_-(b))$$

Osservazione: Se $\nexists \lim f'(x)$, per calcolare la derivata sinistra/destra è necessario risolvere il limite del rapporto incrementale.

Dimostrazione: Per definizione,

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Siccome, per ipotesi, f è continua (da destra), $f(x) \to f(a)$ per $x \to a^+$, e quindi il limite è una forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Si applica allora l'Hôpital:

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \overset{\text{H}}{=} \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \to a^+} f'(x)$$

Analogamente per $f'_-(b)$. $\square$