

Equivalenza tra ϵ -NFA e NFA

1 Equivalenza tra ϵ -NFA e NFA

Si può dimostrare che l'aggiunta delle ϵ -mosse agli NFA, la quale dà luogo al modello degli ϵ -NFA, “non cambia nulla” dal punto di vista espressivo. In altre parole, gli ϵ -NFA riconoscono esattamente la stessa classe di linguaggi riconosciuta dagli NFA, che poi si è già vista essere quella riconosciuta anche dai DFA: i linguaggi regolari.

Come già fatto per l'equivalenza tra DFA e NFA, la dimostrazione di equivalenza viene spezzata nei due versi: partendo da ciascuno dei due tipi di automa considerati, si dimostra (in modo costruttivo) l'esistenza di un automa dell'altro tipo che riconosce lo stesso linguaggio.

2 Da NFA a ϵ -NFA

Dato un NFA $N = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, si costruisce l' ϵ -NFA $E_N = \langle Q, \Sigma, \delta_E, q_0, F \rangle$, dove $\delta_E : Q \times \Sigma_\epsilon \rightarrow 2^Q$ definita come

$$\begin{aligned} \forall q \in Q, \forall a \in \Sigma \quad \delta_E(q, a) &= \delta(q, a) \\ \forall q \in Q \quad \delta_E(q, \epsilon) &= \emptyset \end{aligned}$$

cioè si comporta ugualmente a δ per tutti i simboli dell'alfabeto Σ (gli unici simboli su cui δ è definita), mentre per il simbolo ϵ assume sempre come valore l'insieme vuoto.

In pratica, l'automata E_N così costruito è tecnicamente un ϵ -NFA (perché la funzione di transizione δ_E ha la forma specificata nella definizione di ϵ -NFA), ma non ha alcuna ϵ -transizione. Intuitivamente, ciò significa che il comportamento di E_N è completamente determinato dalle transizioni dell'NFA N di partenza. Da un punto di vista formale, quest'osservazione corrisponde, come al solito, a un lemma che mette in relazione le computazioni dei due automi e a un teorema che afferma che essi riconoscono lo stesso linguaggio:

- *Lemma:* Dato un NFA $N = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, per ogni $w \in \Sigma^*$ si ha che $\hat{\delta}_E(q_0, w) = \hat{\delta}(q_0, w)$.
- *Teorema:* Dato un NFA $N = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, $L(E_N) = L(N)$.

3 Da ϵ -NFA a NFA

Dato un ϵ -NFA $E = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, si costruisce l'NFA $N_E = \langle Q, \Sigma, \delta_N, q_0, F_N \rangle$, dove:

- la funzione di transizione $\delta_N : Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ è definita come

$$\forall q \in Q, \forall a \in \Sigma \quad \delta_N(q, a) = \bigcup_{p \in \text{ECLOSE}(q)} \delta(p, a)$$

- gli stati finali sono

$$F_N = \{q \in Q \mid \text{ECLOSE}(q) \cap F \neq \emptyset\}$$

(con $\text{ECLOSE}(q)$ calcolata sempre rispetto all' ϵ -NFA E).

La definizione della funzione di transizione significa sostanzialmente che, se nell' ϵ -NFA si poteva passare da uno stato q a uno stato q' seguendo prima una o più ϵ -transizioni, e poi una transizione etichettata con un simbolo a (ad esempio $q \xrightarrow{\epsilon} p \xrightarrow{a} q'$), nell'NFA ci si “dimentica” delle ϵ -transizioni, e si arriva invece direttamente a q' ($q \xrightarrow{a} q'$).

Per quanto riguarda gli stati finali dell'NFA, questi sono tutti gli stati che erano già finali nell' ϵ -NFA, e quelli dai quali si raggiungeva uno stato finale tramite un percorso formato solo da ϵ -transizioni. Ad esempio, se nell' ϵ -NFA si aveva $q'' \in F$ ed esisteva un percorso $q \xrightarrow{\epsilon} q' \xrightarrow{\epsilon} q''$, allora nell'NFA si ha ancora $q'' \in F_N$, ma in più anche $q, q' \in F_N$.

Osservazione: L'automa N_E così costruito ha gli stessi stati di E . Ciò implica che tale costruzione non ha alcun impatto dal punto di vista della complessità, se quest'ultima viene misurata sul numero di stati. Non si ha dunque il problema di “crescita esponenziale” che si presenta nel passaggio da un NFA a un DFA.

3.1 Relazione tra le computazioni di E e N_E

Lemma: Dato un ϵ -NFA $E = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, per ogni $w \in \Sigma^*$ si ha che

$$\text{ECLOSE}(\hat{\delta}_N(q_0, w)) = \hat{\delta}(q_0, w)$$

La dimostrazione è per induzione sulla lunghezza di w .

- *Base:* $|w| = 0$, cioè $w = \epsilon$. Per le definizioni delle funzioni di transizione estese,

$$\hat{\delta}_N(q_0, \epsilon) = \{q_0\} \quad \hat{\delta}(q_0, \epsilon) = \text{ECLOSE}(q_0)$$

quindi l'asserto del lemma vale:

$$\text{ECLOSE}(\hat{\delta}_N(q_0, \epsilon)) = \text{ECLOSE}(\{q_0\}) = \text{ECLOSE}(q_0) = \hat{\delta}(q_0, \epsilon)$$

Prima di dimostrare il passo induttivo, bisogna fare un'osservazione sulla semplificazione delle unioni di insiemi. Si consideri lo schema

$$\bigcup_{p \in S} \left(\bigcup_{r \in \text{ECLOSE}(p)} I(r) \right)$$

dove $I(r)$ è un'espressione che determina un insieme in funzione di r . Per ogni p in S , r assume tutti i valori in $\text{ECLOSE}(p)$. Allora, complessivamente, r assume tutti i possibili valori in $\bigcup_{p \in S} \text{ECLOSE}(p)$, ma questo non è altro che $\text{ECLOSE}(S)$, per la definizione di ϵ -chiusura di un insieme. Dunque, l'unione di partenza può essere riscritta come:

$$\bigcup_{p \in S} \left(\bigcup_{r \in \text{ECLOSE}(p)} I(r) \right) = \bigcup_{r \in \text{ECLOSE}(S)} I(r)$$

Adesso si può procedere alla dimostrazione del passo induttivo, nel quale verrà impiegata questa uguaglianza, sostituendo al posto di $I(r)$ la funzione di transizione dell' ϵ -NFA.

- *Passo induttivo:* $|w| > 0$, cioè $w = xa$, con $x \in \Sigma^*$ e $a \in \Sigma$. L'ipotesi induttiva (IH) è $\text{ECLOSE}(\hat{\delta}_N(q_0, x)) = \hat{\delta}(q_0, x)$.

$$\begin{aligned} & \text{ECLOSE}(\hat{\delta}_N(q_0, xa)) \\ &= \text{ECLOSE} \left(\bigcup_{p \in \hat{\delta}_N(q_0, x)} \delta_N(p, a) \right) && \text{[per definizione di } \hat{\delta}_N] \\ &= \text{ECLOSE} \left(\bigcup_{p \in \hat{\delta}_N(q_0, x)} \left(\bigcup_{r \in \text{ECLOSE}(p)} \delta(r, a) \right) \right) && \text{[per definizione di } \delta_N] \\ &= \text{ECLOSE} \left(\bigcup_{r \in \text{ECLOSE}(\hat{\delta}_N(q_0, x))} \delta(r, a) \right) && \text{[per la semplificazione su } \bigcup] \\ &= \text{ECLOSE} \left(\bigcup_{r \in \hat{\delta}(q_0, x)} \delta(r, a) \right) && \text{[per (IH)]} \\ &= \hat{\delta}(q_0, xa) && \text{[per definizione di } \hat{\delta}] \end{aligned}$$

Così, anche nel caso induttivo, l'asserto del lemma è dimostrato.

3.2 Teorema principale

Teorema: Dato un ϵ -NFA $E = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, $L(N_E) = L(E)$.

Per definizione, l'NFA N_E accetta una stringa $w \in \Sigma^*$ se e solo se $\hat{\delta}_N(q_0, w) \cap F_N \neq \emptyset$. Poiché l'insieme F_N degli stati finali è definito come

$$F_N = \{q \in Q \mid \text{ECLOSE}(q) \cap F \neq \emptyset\}$$

la stringa w viene accettata se e solo se almeno uno stato $q \in \hat{\delta}_N(q_0, w)$ ha una ϵ -chiusura che a sua volta contiene almeno uno stato finale dell' ϵ -NFA, $\text{ECLOSE}(q) \cap F \neq \emptyset$. Ma la ϵ -chiusura di q è, per definizione, inclusa nella ϵ -chiusura dell'intero insieme $\hat{\delta}_N(q_0, w)$,

$$q \in \hat{\delta}_N(q_0, w) \implies \text{ECLOSE}(q) \subseteq \text{ECLOSE}(\hat{\delta}_N(q_0, w))$$

quindi la condizione di accettazione $\hat{\delta}_N(q_0, w) \cap F_N \neq \emptyset$ può essere riscritta come $\text{ECLOSE}(\hat{\delta}_N(q_0, w)) \cap F \neq \emptyset$.

Fatto questo ragionamento, si procede alla dimostrazione del teorema, mostrando che una stringa $w \in \Sigma^*$ è accettata da N_E se e solo se è accettata da E :

$$w \in L(N_E)$$

$$\iff \hat{\delta}_N(q_0, w) \cap F_N \neq \emptyset \quad [\text{per definizione di accettazione su un NFA}]$$

$$\iff \text{ECLOSE}(\hat{\delta}_N(q_0, w)) \cap F \neq \emptyset \quad [\text{per il ragionamento sull'accettazione}]$$

$$\iff \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset \quad [\text{per il lemma}]$$

$$\iff w \in L(E) \quad [\text{per definizione di accettazione su un } \epsilon\text{-NFA}]$$

È così dimostrato che $L(N_E) = L(E)$.

4 Riassunto delle relazioni tra i modelli

Innanzitutto, si è stabilito che un linguaggio è *regolare* se e solo se è riconosciuto da un DFA.

Poi, si è dimostrato che $\text{NFA} \approx \text{DFA}$: gli NFA sono equivalenti ai DFA, nel senso che riconoscono la stessa classe di linguaggi. In particolare:

- dato un DFA, si può costruire un NFA che riconosce lo stesso linguaggio;
- dato un NFA, si può costruire un DFA che riconosce lo stesso linguaggio (ma quest'ultima costruzione presenta delle criticità dal punto di vista della complessità, in quanto il numero di stati del DFA può essere esponenziale nel numero di stati dell'NFA).

Infine, si è dimostrato anche che $\epsilon\text{-NFA} \approx \text{NFA}$, cioè che gli ϵ -NFA sono equivalenti agli NFA nel senso che riconoscono la stessa classe di linguaggi:

- dato un NFA, si può costruire un ϵ -NFA che riconosce lo stesso linguaggio;
- dato un ϵ -NFA, si può costruire un NFA che riconosce lo stesso linguaggio.

Complessivamente, per la transitività della relazione di equivalenza, si deduce che $\text{DFA} \approx \text{NFA} \approx \epsilon\text{-NFA}$: tutti e tre questi modelli riconoscono la classe dei linguaggi regolari.