Azzolini Riccardo 2020-06-04

Modelli di Herbrand

1 Chiusura universale ed esistenziale

Definizione: Data una formula φ con variabili libere $\text{FV}(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\}$,

- la **chisura universale** di φ è la formula chiusa

$$U(\varphi) = \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi$$

- la **chisura esistenziale** di φ è la formula chiusa

$$Ex(\varphi) = \exists x_1 \dots \exists x_n \varphi$$

Lemma:

- φ è valida se e solo se $U(\varphi)$ è valida;
- φ è soddisfacibile se e solo se $Ex(\varphi)$ è soddisfacibile.

1.1 Forme di Skolem

Data una formula φ, la formula $Ex^S(\varphi)$ – la skolemizzazione della chiusura esistenziale di φ – è chiusa e in forma di Skolem, e si ha che:

$$\varphi \text{ è soddisfacibile} \iff Ex(\varphi) \text{ è soddisfacibile} \iff Ex^S(\varphi) \text{ è soddisfacibile}$$

Quindi, *ogni formula è equisoddisfacibile a una formula chiusa in forma di Skolem.*

1.1.1 Esempio

Sia $\varphi = \forall x P(x, y)$. Questa formula non è chiusa, perché $\mathrm{FV}(\varphi) = \{y\}$; la sua chiusura esistenziale è:

$$Ex(\varphi) = \exists y \forall x P(x, y)$$

La formula di partenza φ è soddisfacibile: ad esempio, considerando il modello

$$\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I) \qquad I(P) = \{(n, m) \mid n \geq m\}$$

e l'assegnamento $e(y) = 0$, si ha che $(\mathcal{A}, e) \models \varphi$, perché è vero che ogni numero naturale è ≥ 0. Inoltre, $\mathcal{A} \models Ex(\varphi)$: basta considerare il caso in cui il quantificatore esistenziale assegna alla variabile quantificata y l'elemento del dominio 0.

Adesso, si esegue la skolemizzazione, ottenendo

$$Ex^S(\varphi) = \forall x P(x, c)$$

dove c è un nuovo simbolo di costante. Estendendo il modello $\mathcal{A}$ con l'interpretazione di questa nuova costante,

$$\mathcal{A}' = (\mathbb{N}, I') \qquad I'(c) = 0 \qquad I'(P) = I(P) = \{(n, m) \mid n \geq m\}$$

si ha che $\mathcal{A}' \models Ex^S(\varphi)$.

2 Termini ground

Definizione: Un termine è **ground** (o **chiuso**) se non contiene variabili. Un'**istanza ground** di un termine $f(t_1, \dots, t_n)$ è un termine ground ottenuto sostituendo le variabili di $f(t_1, \dots, t_n)$ con termini ground.

Ad esempio, il termine $t = f(x, g(c))$ non è un termine ground, perché contiene il simbolo di variabile x, ma una sua istanza ground può essere ottenuta sostituendo la variabile x con un termine ground del linguaggio:

- sostituendola con il termine ground c, si ottiene l'istanza ground $f(c, g(c))$;
- sostituendola con il termine ground $f(c, g(c))$, si ottiene un'altra istanza ground $f(f(c, g(c)), g(c))$;
- ecc.

3 Universo di Herbrand

Definizione: Sia φ una formula chiusa e in forma di Skolem. L'**universo di Herbrand** $H(\varphi)$ di φ è l'insieme dei termini ground costruibili a partire dai simboli di φ. Se φ non contiene simboli di costante, se ne aggiunge uno nuovo, e si costruiscono i termini ground a partire da questo.

3.1 Esempi

- Sia $\varphi = \forall x \forall y (A(c,x) \to B(f(y)))$. φ contiene un simbolo di costante c e un simbolo di funzione $f^{(1)}$, quindi genera il seguente universo di Herbrand:

$$H(\varphi) = \{c, f(c), f(f(c)), \ldots\}$$

- Sia $\varphi = \forall x (A(c) \to B(x))$. Essa contiene solo un simbolo di costante c, quindi:

$$H(\varphi) = \{c\}$$

- Sia $\varphi = \forall x \forall y (A(f(x), g(x,y)) \to B(x, f(y)))$. Siccome φ *non* contiene simboli di costante (mentre contiene i simboli di funzione $f^{(1)}$ e $g^{(2)}$), se ne aggiunge uno nuovo c, e si ha allora:

$$H(\varphi) = \{c, f(c), g(c,c), f(g(c,c)), g(c, f(c)), \ldots\}$$

Osservazione: Se una formula contiene simboli di funzione, il suo universo di Herbrand è un insieme infinito, altrimenti è un insieme finito.

4 Modelli di Herbrand

Definizione: Sia φ una formula chiusa e in forma di Skolem. Un modello $\mathcal{A} = (D, I)$ è un **modello** (**struttura**) **di Herbrand** per φ se:

- $D = H(\varphi)$;
- $I(c) = c$ per ogni costante $c \in H(\varphi)$;
- se f è una funzione n-aria, allora

$$I(f) : D^n \to D \qquad I(f)(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n) \in D$$

I predicati, invece, possono essere interpretati arbitrariamente (purché in modo coerente con il dominio scelto, come sempre: $I(P) \subseteq (H(\varphi))^n$ per ogni predicato n-ario P), quindi esistono diversi modelli di Herbrand per una data formula, che variano appunto sull'interpretazione dei predicati.

L'idea di un modello di Herbrand è quella di costruire un modello a partire dal materiale sintattico della formula, scegliendo come elementi del dominio direttamente degli elementi sintattici, i termini chiusi. Allora, un'interpretazione coerente con questa scelta deve far corrispondere ciascun termine chiuso a sé stesso.

4.1 Esempio

Sia $\varphi = \forall x(A(x) \to B(f(x)))$, e quindi $H(\varphi) = \{c, f(c), f(f(c)), \dots\}$. Un modello di Herbrand per φ è una struttura $\mathcal{A} = (H(\varphi), I)$ nella quale l'interpretazione è tale che:

$$I(c) = c \qquad I(f) = t \in H(\varphi) \mapsto f(t) \in H(\varphi)$$

Quindi, ad esempio, $[\![f(f(c))]\!]_{\mathcal{A}} = f(f(c))$.

I predicati A e B possono essere interpretati in diversi modi.

- Ponendo, ad esempio,

  $$I(A) = \{c, f(f(c))\} \qquad I(B) = \{f(c), f(f(f(c)))\}$$

  si ha che $\mathcal{A} \models \varphi$: la struttura di Herbrand $\mathcal{A}$ è un modello per la formula φ.
- Scegliendo invece

  $$I(A) = H(\varphi) \qquad I(B) = \varnothing$$

  si ha che $\mathcal{A} \not\models \varphi$.

5 Soddisfacibilità e modelli di Herbrand

Teorema: Sia φ una formula chiusa e in forma di Skolem. φ è soddisfacibile se e solo se ha un modello di Herbrand (cioè esiste un modello di Herbrand che la soddisfa).

Dimostrazione: Se φ ha un modello di Herbrand, allora per definizione è soddisfacibile. La parte non banale della dimostrazione è invece quella del viceversa, cioè del fatto che se φ è soddisfacibile allora ha un modello di Herbrand. Sia dunque φ una formula in forma di Skolem, chiusa e soddisfacibile, e sia $\mathcal{M} = (D, I)$ un suo modello ($\mathcal{M} \models \varphi$).

Per prima cosa, bisogna costruire l'universo di Herbrand di φ. A tale scopo, se φ non contiene costanti, se ne introduce una nuova c, e, scegliendo arbitrariamente un elemento del dominio $d \in D$, si pone $I(c) = d$. Stabilire un'interpretazione per c nel modello originale è necessario perché la dimostrazione richiede di poter interpretare in tale modello tutti i termini dell'universo di Herbrand, compresi quelli contenenti la nuova costante.

Adesso, si definisce il modello di Herbrand $\mathcal{H} = (H(\varphi), J)$. Essendo un modello di Herbrand, l'interpretazione di costanti e funzioni è fissa, mentre rimane da specificare quella dei predicati, che qui si definisce in base all'interpretazione degli stessi predicati nel modello originale $\mathcal{M}$:

$$\widetilde{\forall} P^{(n)} \quad J(P) = \big\{(t_1, \dots, t_n) \in (H(\varphi))^n \mid ([\![t_1]\!]_\mathcal{M}, \dots, [\![t_n]\!]_\mathcal{M}) \in I(P)\big\}$$

Avendo assunto che $\mathcal{M} \models \varphi$, si dimostra che allora anche $\mathcal{H} \models \varphi$, per induzione sulla struttura di φ:

- *Caso base*: Se $\varphi = P(t_1, \dots, t_n)$ è una formula atomica (chiusa, per ipotesi), allora:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models P(t_1, \dots, t_n) &\iff ([\![t_1]\!]_\mathcal{M}, \dots, [\![t_n]\!]_\mathcal{M}) \in I(P) && \text{(semantica dei predicati)} \\ &\iff (t_1, \dots, t_n) \in J(P) && \text{(definizione di } J(P)\text{)} \\ &\iff \mathcal{H} \models P(t_1, \dots, t_n) && \text{(semantica dei predicati)} \end{aligned}$$

- *Passo induttivo*: Si dimostra per casi sulla forma di φ.
  - Se $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \psi_1 \wedge \psi_2 &\iff \mathcal{M} \models \psi_1 \text{ e } \mathcal{M} \models \psi_2 \\ &\implies \mathcal{H} \models \psi_1 \text{ e } \mathcal{H} \models \psi_2 && \text{(ipotesi induttiva)} \\ &\iff \mathcal{H} \models \psi_1 \wedge \psi_2 \end{aligned}$$

  - I casi degli altri connettivi sono analoghi.
  - Non si ha mai il caso $\varphi = \exists x \psi$ poiché, per ipotesi, φ è in forma di Skolem.
  - Se $\varphi = \forall x \psi$,

$$\mathcal{M} \models \forall x \psi \iff \widetilde{\forall} d \in D \quad (\mathcal{M}, [d/x]) \models \psi$$

    ma non si può applicare direttamente l'ipotesi di induzione, perché ψ è una formula aperta, mentre il teorema (e quindi l'ipotesi di induzione) si applica alle formule chiuse.

    Invece, si considera il sottoinsieme D^T del dominio D i cui elementi sono denotati da termini chiusi[1] (ovvero termini in $H(\psi)$), cioè:

$$D^T = \{d \in D \mid d = [\![t]\!]_\mathcal{M} \text{ per qualche } t \in H(\varphi)\} \subseteq D$$

[1] Per alcuni modelli si ha $D^T = D$, ma per altri no, perché un linguaggio potrebbe avere pochi termini chiusi e molti elementi del dominio. Un esempio estremo è un linguaggio sui numeri naturali con un solo simbolo di costante e nessun simbolo di funzione: esso ha un unico termine chiuso, il quale può denotare un singolo elemento tra gli infiniti del dominio $\mathbb{N}$.

Allora:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M} \models \forall x \psi \\
&\quad \iff \widetilde{\forall} d \in D \quad (\mathcal{M}, [d/x]) \models \psi \\
&\quad \implies \widetilde{\forall} d \in D^T \subseteq D \quad (\mathcal{M}, [d/x]) \models \psi \\
&\quad \iff \widetilde{\forall} t \in H(\varphi) \quad (\mathcal{M}, [[\![t]\!]_{\mathcal{M}}/x]) \models \psi && \text{(definizione di } D^T\text{)} \\
&\quad \iff \widetilde{\forall} t \in H(\varphi) \quad \mathcal{M} \models \psi[t/x]
\end{aligned}
$$

$\psi[t/x]$ è chiusa, dunque si può usare l'ipotesi induttiva:

$$
\begin{aligned}
&\quad \implies \widetilde{\forall} t \in H(\varphi) \quad \mathcal{H} \models \psi[t/x] \\
&\quad \iff \widetilde{\forall} t \in H(\varphi) \quad (\mathcal{H}, [[\![t]\!]_{\mathcal{H}}/x]) \models \psi \\
&\quad \iff \widetilde{\forall} t \in H(\varphi) \quad (\mathcal{H}, [t/x]) \models \psi && \text{(modello di Herbrand: } [\![t]\!]_{\mathcal{H}} = t\text{)} \\
&\quad \iff \mathcal{H} \models \forall x \psi
\end{aligned}
$$