Azzolini Riccardo 2020-04-16

Calcoli a tableaux

1 Calcoli a tableaux

In generale, in matematica, un *calcolo* è un meccanismo puramente sintattico che consente di dedurre proprietà degli oggetti su cui opera.

Nell'ambito della logica, i calcoli sono sistemi formali, meccanismi sintattici, di prova che vengono utilizzati per stabilire una qualche proprietà semantica (validità / soddisfacibilità / insoddisfacibilità) delle formule di una logica.

I **calcoli a tableaux** permettono di stabilire se una formula (o un insieme di formule) è o meno insoddisfacibile (e, con un "trucco", se è o meno valida). Essi operano su insiemi di formule, tramite delle regole che consentono di "destrutturare" le formule nell'insieme. In particolare, il calcolo a tableaux per la logica proposizionale classica è costituito da regole per destrutturare i seguenti tipi di formule:

- composte non negate: $A \land B$, $A \lor B$, $A \to B$;
- composte negate: $\neg(A \land B)$, $\neg(A \lor B)$, $\neg(A \to B)$;
- doppiamente negate: $\neg\neg A$.

2 Regole

Due esempi di regole sono:

1. quella per destrutturare le formule del tipo $A \land B$:

$$\frac{\Gamma, A \land B}{\Gamma, A, B}\ \land$$

2. quella per destrutturare le formule $\neg(A \land B)$:

$$\frac{\Gamma, \neg(A \land B)}{\Gamma, \neg A \mid \Gamma, \neg B}\ \neg\land$$

Innanzitutto, le regole si leggono dall'alto verso il basso: a partire dall'insieme di formule scritto sopra la linea orizzontale, applicando la regola si ottiene l'insieme (o gli insiemi, come nel caso della regola 2) scritto sotto la linea.

Come già detto, le regole operano su insiemi; per comodità, come abbreviazione, si utilizza la virgola per indicare l'unione insiemistica. Ad esempio, nella 1, $\Gamma, A \wedge B$ va inteso come $\Gamma \cup \{A \wedge B\}$.

L'insieme di formule che sta sopra la linea prende il nome di **premessa**, e la formula evidenziata nella premessa (ad esempio $A \wedge B$ nella 1 e $\neg(A \wedge B)$ nella 2) è chiamata **formula principale** della regola (di fatto, è quella su cui agisce la regola, mentre Γ rappresenta tutte le eventuali altre formule nella premessa, sulle quali la regola non opera).

Una regola può avere una o più **conclusioni**, cioè insiemi sotto la linea orizzontale. Ad esempio, la 1 ha una sola conclusione, mentre la 2 ne ha due, $\Gamma, \neg A$ e $\Gamma, \neg B$, separate dalla barra verticale $|$. Si riporta Γ nelle conclusioni per indicare che tutte le formule della premessa, tranne quella principale, rimangono inalterate.

Le formule evidenziate nelle conclusioni, costruite a partire dalle sottoformule della formula principale, vengono chiamate **ridotti** della formula principale:

- A e B sono i ridotti generati dalla regola 1, applicata alla formula principale $A \wedge B$;
- analogamente $\neg A$ e $\neg B$ sono i ridotti generati dall'applicazione della regola 2.

Infine, ogni regola ha un nome, scritto a destra della linea orizzontale: ad esempio, il nome della 1 è $\wedge$, mentre quello della 2 è $\neg\wedge$. Comunque, il nome può essere omesso, perché è sempre deducibile dalla premessa e dalle conclusioni quale sia la regola che è stata applicata.

3 Calcolo a tableaux per la CPL

Complessivamente, le regole del calcolo a tableaux per la logica proposizionale classica, $\mathrm{T_{CPL}}$, sono:

- regole per le formule composte non negate:

$$\frac{\Gamma, A \wedge B}{\Gamma, A, B}\,\wedge \qquad \frac{\Gamma, A \vee B}{\Gamma, A \mid \Gamma, B}\,\vee \qquad \frac{\Gamma, A \to B}{\Gamma, \neg A \mid \Gamma, B}\,\to$$

- regole per le formule composte negate:

$$\frac{\Gamma, \neg(A \wedge B)}{\Gamma, \neg A \mid \Gamma, \neg B}\,\neg\wedge \qquad \frac{\Gamma, \neg(A \vee B)}{\Gamma, \neg A, \neg B}\,\neg\vee \qquad \frac{\Gamma, \neg(A \to B)}{\Gamma, A, \neg B}\,\neg\to$$

- regola per le formule doppiamente negate:

$$\frac{\Gamma, \neg\neg A}{\Gamma, A}\,\neg\neg$$

4 Costruzione di un tableau

Un albero di prova, detto appunto tableau,[1] si ottiene applicando ripetutamente le regole del calcolo, a partire da un insieme di formule.

Ad esempio, dato $\Gamma = \{\neg((p \to q) \to (\neg q \to \neg p))\}$:

1. Si parte dalla formula che si vuole analizzare:

$$\neg((p \to q) \to (\neg q \to \neg p))$$

2. Si applica una prima regola; in questo caso, avendo una singola formula, costituita da un'implicazione negata, non si ha scelta: l'unica regola che si può applicare è $\neg\!\to$.

$$\frac{\neg((p \to q) \to (\neg q \to \neg p))}{(p \to q), \neg(\neg q \to \neg p)}\,\neg\!\to$$

Nota: Nello scrivere l'insieme Γ come premessa, sono state omesse le parentesi graffe (che qui sono "inutili").

3. Adesso, avendo un insieme di due formule (la conclusione della regola precedente), si può decidere di procedere nella costruzione del tableau applicando una regola sulla prima formula, oppure sulla seconda. In questo esempio, si sceglie di operare sulla prima formula, e allora si applica la regola corrispondente all'implicazione:

$$\frac{\dfrac{\neg((p \to q) \to (\neg q \to \neg p))}{(p \to q), \neg(\neg q \to \neg p)}\,\neg\!\to}{\neg p, \neg(\neg q \to \neg p) \mid q, \neg(\neg q \to \neg p)}\,\to$$

4. A questo punto, si hanno due insiemi su cui lavorare, e si sceglie ad esempio di iniziare da quello di sinistra,

$$\neg p, \neg(\neg q \to \neg p)$$

L'unica formula che si può destrutturare è $\neg(\neg q \to \neg p)$, alla quale si applica la regola $\neg\!\to$ (mentre non ci sono regole che si applicano ai letterali, cioè, in questo caso, a $\neg p$):

$$\frac{\neg p, \neg(\neg q \to \neg p)}{\neg p, \neg q, \neg\neg p}\,\neg\!\to$$

[1]La parola *tableau* è il singolare, mentre *tableaux* è il plurale.

   Nell'insieme risultante, si può destrutturare solo la formula $\neg\neg p$, usando la regola per la doppia negazione:

$$\cfrac{\cfrac{\neg p, \neg(\neg q \to \neg p)}{\neg p, \neg q, \neg\neg p}\,{\scriptstyle \neg\to}}{\neg p, \neg q, p}\,{\scriptstyle \neg\neg}$$

   L'insieme ottenuto come conclusione di quest'ultima regola è formato interamente da letterali, quindi non si possono applicare ulteriori regole.

5. Si torna adesso a considerare l'insieme di destra,

$$q, \neg(\neg q \to \neg p)$$

   Come a sinistra, si applica la regola $\neg\to$,

$$\cfrac{q, \neg(\neg q \to \neg p)}{q, \neg q, \neg\neg p}\,{\scriptstyle \neg\to}$$

   e infine si destruttura la doppia negazione, applicando $\neg\neg$:

$$\cfrac{\cfrac{q, \neg(\neg q \to \neg p)}{q, \neg q, \neg\neg p}\,{\scriptstyle \neg\to}}{q, \neg q, p}\,{\scriptstyle \neg\neg}$$

Complessivamente, il tableau così costruito è:

$$\cfrac{\cfrac{\neg((p \to q) \to (\neg q \to \neg p))}{(p \to q), \neg(\neg q \to \neg p)}\,{\scriptstyle \neg\to}}{\cfrac{\cfrac{\neg p, \neg(\neg q \to \neg p)}{\neg p, \neg q, \neg\neg p}\,{\scriptstyle \neg\to}}{\neg p, \neg q, p}\,{\scriptstyle \neg\neg} \;\Bigg|\; \cfrac{\cfrac{q, \neg(\neg q \to \neg p)}{q, \neg q, \neg\neg p}\,{\scriptstyle \neg\to}}{q, \neg q, p}\,{\scriptstyle \neg\neg}}\,{\scriptstyle \to}$$

5 Tableaux come alberi

Il calcolo a tableaux consente di costruire delle strutture che sono alberi (appunto, alberi di prova). Infatti, intuitivamente, ogni insieme di formule corrisponde a un nodo, e le regole del calcolo indicano come ciascun nodo viene espanso, cioè quali sono i suoi figli:

- per una regola con una sola conclusione, il nodo dell'albero corrispondente alla premessa ha come *unico figlio* il nodo corrispondente alla conclusione:

$$\cfrac{\Gamma, A \land B}{\Gamma, A, B}\,{\scriptstyle \land} \quad\Longrightarrow\quad \begin{array}{c} \Gamma, A \land B \\ | \\ \Gamma, A, B \end{array}$$

- per una regola con due conclusioni, il nodo dell'albero corrispondente alla premessa ha *due figli*, corrispondenti alle due conclusioni:

$$\frac{\Gamma, A \vee B}{\Gamma, A \mid \Gamma, B}\vee \quad \Longrightarrow \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & \Gamma, A \vee B \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ \Gamma, A & & \Gamma, B \end{tikzcd}$$

Allora, il tableau costruito prima,

$$\cfrac{\cfrac{\neg((p \to q) \to (\neg q \to \neg p))}{(p \to q), \neg(\neg q \to \neg p)}\neg\to}{\cfrac{\cfrac{\neg p, \neg(\neg q \to \neg p)}{\neg p, \neg q, \neg\neg p}\neg\to}{\neg p, \neg q, p}\neg\neg \;\Bigg|\; \cfrac{\cfrac{q, \neg(\neg q \to \neg p)}{q, \neg q, \neg\neg p}\neg\to}{q, \neg q, p}\neg\neg}\to$$

corrisponde al seguente albero:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \neg((p \to q) \to (\neg q \to \neg p)) \arrow[d, dash, "\neg\to"] & \\ & (p \to q), \neg(\neg q \to \neg p) \arrow[dl, dash, "\to"] \arrow[dr, dash, "\to"] & \\ \neg p, \neg(\neg q \to \neg p) \arrow[d, dash, "\neg\to"] & & q, \neg(\neg q \to \neg p) \arrow[d, dash, "\neg\to"] \\ \neg p, \neg q, \neg\neg p \arrow[d, dash, "\neg\neg"] & & q, \neg q, \neg\neg p \arrow[d, dash, "\neg\neg"] \\ \neg p, \neg q, p & & q, \neg q, p \end{tikzcd}$$

Nota: Data la corrispondenza con gli alberi, si usa il termine "ramo" anche nel contesto dei tableaux. Ad esempio, nel tableau e nell'albero riportati sopra, sono due rami quelli che iniziano con le premesse $\neg p, \neg(\neg q \to \neg p)$ e $q, \neg(\neg q \to \neg p)$.