Azzolini Riccardo 2018-10-19

Combinatoria

1 Fattoriale

Dato un numero $n \in \mathbb{N}$, il suo **fattoriale** $n!$ (si legge "n fattoriale") è il prodotto di tutti i numeri da 1 a n.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

Per convenzione, si pone $0! = 1$.

2 Disposizioni semplici e permutazioni

Una **disposizione semplice** di k elementi scelti tra n, con $k \leq n$, è una sequenza di k simboli scelti tra gli n possibili, *senza ripetizioni*.

Il numero di disposizioni semplici è

$$d_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Se $n = k$ allora le disposizioni semplici si chiamano **permutazioni**, e ce ne sono $n!$:

$$d_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

2.1 Esempi

Dato l'insieme $\{a, b, c, d\}$, quindi con $n = 4$:

- con $k = 2$ si ha:

$$d_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{24}{2} = 12$$
$$ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc$$

- con $k = 3$ si ha:

$$d_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{24}{1} = 24$$

$$abc, abd, acb, acd, adb, adc, bac, bad, bca, bcd, bda, bdc,$$

$$cab, cad, cba, cbd, cda, cdb, dab, dac, dba, dbc, dca, dcb$$

- con $k = 4$ (permutazioni) si ha:

$$d_{4,4} = \frac{4!}{(4-4)!} = 4! = 24$$

$$abcd, abdc, acbd, acdb, adbc, adcb, bacd, badc, bcad, bcda, bdac, bdca,$$

$$cabd, cadb, cbad, cbda, cdab, cdba, dabc, dacb, dbac, dbca, dcab, dcba$$

3 Numero di funzioni iniettive e biettive

Dati due insiemi A e B, con $|A| = k$, $|B| = n$ e $k \leq n$, il numero di funzioni iniettive da A a B è $d_{n,k}$.

A livello intuitivo, infatti, costruire una funzione iniettiva da A a B significa scegliere, per ogni elemento di A (quindi $|A| = k$ volte), un'immagine tra gli elementi di B (che sono $|B| = n$), senza ripetizioni (dato che per ogni $x, y \in A$ deve valere $x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$).

Se $|A| = |B| = n$, tutte le funzioni iniettive da A a B sono anche suriettive, e quindi biettive, e ce ne sono $d_{n,n} = n!$.

3.1 Esempio: funzioni iniettive

$$A = \{1, 2\} \qquad |A| = k = 2$$

$$B = \{a, b, c, d\} \qquad |B| = n = 4$$

Ci sono $|B|^{|A|} = 4^2 = 16$ funzioni da A a B. Di queste, sono iniettive:

$$d_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{24}{2} = 12$$

3.2 Esempio: funzioni biettive

$$A = \{1, 2, 3\} \qquad B = \{a, b, c\}$$
$$|A| = |B| = 3$$

Ci sono $|B|^{|A|} = 3^3 = 27$ funzioni $A \to B$. Di queste, sono biettive:

$$d_{3,3} = 3! = 6$$

4 Disposizioni con ripetizione

Una **disposizione con ripetizione** di k elementi scelti tra n è una sequenza di k simboli scelti tra gli n possibili, *anche con ripetizioni.*

Il numero di disposizioni con ripetizione è

$$d'_{n,k} = n^k$$

4.1 Esempio

Dato l'insieme $\{a, b, c, d\}$, quindi con $n = 4$:

- con $k = 2$ si ha:

$$d'_{4,2} = 4^2 = 16$$
$$aa, ab, ac, ad, ba, bb, bc, bd, ca, cb, cc, cd, da, db, dc, dd$$

- con $k = 3$ si ha:

$$d'_{4,3} = 4^3 = 64$$
$$aaa, aab, aac, aad, aba, abb, abc, abd, ..., ddc, ddd$$

- con $k = 4$ si ha:

$$d'_{4,4} = 4^4 = 256$$
$$aaaa, aaab, aaac, aaad, ..., dddd$$

- con $k = 5$ si ha:

$$d'_{4,5} = 4^5 = 1024$$
$$aaaaa, aaaab, ..., ddddd$$

5 Coefficiente binomiale

Il **coefficiente binomiale** di n su k, con $0 \le k \le n$, è

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Casi particolari:

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1$$

6 Combinazioni semplici

Una **combinazione semplice** di k elementi scelti tra n, con $k \le n$, è un sottoinsieme di k elementi di un insieme con n elementi.

Il numero di combinazioni semplici è:

$$c_{n,k} = \binom{n}{k}$$

Le combinazioni semplici contano quanti sottoinsiemi con k elementi esistono. Deve quindi valere

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n = |\mathcal{P}(A)|$$

dove A è un qualunque insieme con $|A| = n$.

6.1 Esempio

$$A = \{a, b, c\} \qquad |A| = 3$$

L'insieme A ha:

- $\binom{3}{0} = 1$ sottoinsieme di 0 elementi: $\{\}$
- $\binom{3}{1} = 3$ sottoinsiemi di 1 elemento (singleton): $\{a\}, \{b\}, \{c\}$
- $\binom{3}{2} = 3$ sottoinsiemi di 2 elementi: $\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}$
- $\binom{3}{3} = 1$ sottoinsieme di 3 elementi: $\{a, b, c\} = A$

In totale:

$$|\mathcal{P}(A)| = \binom{3}{0} + \binom{3}{1} + \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$$