Azzolini Riccardo 2018-11-06

Matrici e vettori

1 Minore

Un **minore** di ordine p di una matrice A è il determinante di una sottomatrice quadrata $p \times p$ di A.

Se $A = (a_{ij})$ è una matrice quadrata $n \times n$, e A_{ij} è la matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta cancellando l'i-esima riga e la j-esima colonna di A, allora $\det A_{ij}$ si chiama **minore complementare** di a_{ij}. Inoltre, $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ si chiama **complemento algebrico** di a_{ij}.

1.1 Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A_{33} è una sottomatrice 2×2 di A, quindi

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 0 = 1$$

è un minore di ordine 2 di A (per la precisione, il minore complementare di a_{33}).

2 Proprietà del determinante

- Se una matrice quadrata $A \in M_n$ ha una riga o una colonna composta da tutti 0, allora $\det A = 0$.
- Date due matrici quadrate $A, B \in M_n$, il determinante del loro prodotto righe per colonne è uguale al prodotto dei loro determinanti:

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

Di conseguenza, se A è invertibile e B è il suo inverso, cioè se $A \cdot B = I_n$, allora $\det A \cdot \det B = \det I_n = 1$. Da ciò si ricava che una matrice A è **invertibile** se e solo se $\det A \neq 0$. Una matrice non invertibile, cioè con determinante 0, si dice invece **singolare**.

- Date $A, B \in M_n$, se B si ottiene moltiplicando una riga di A per uno scalare $r \in \mathbb{R}$, allora $\det B = r \cdot \det A$. Ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 6 = -5$$

$$\det A' = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 - 12 = -10$$

- Data una matrice $A \in M_n$ e uno scalare $r \in \mathbb{R}$, vale l'uguaglianza:

$$\det(r \cdot A) = r^n \det A$$

Ad esempio:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.5 \\ 0.7 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} &= \det \left(0.1 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \right) = (0.1)^3 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \\ &= 10^{-3}(6 + 6 + 140 - 10 - 4 - 126) \\ &= 10^{-3} \cdot 12 = 0.012 \end{aligned}$$

3 Vettori

L'insieme $\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ è l'insieme delle n-uple di $\mathbb{R}$ (come caso particolare, con $n = 1$ si hanno semplicemente i numeri reali: $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$). Una n-upla si chiama anche **vettore**.

Una matrice $A \in M_{n,m}$ si può anche vedere come un "insieme" di:

- n m-uple (una per ogni riga)
- m n-uple (una per ogni colonna)

3.1 Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A è composta dalle 2 triple $(1, 0, 1)$ e $(0, 2, 1)$, oppure dalle 3 coppie $(1, 0)$, $(0, 2)$ e $(1, 1)$.

4 Operazioni tra vettori e combinazioni lineari

Dati due vettori $r_1 = (a_1, ..., a_n)$ e $r_2 = (b_1, ..., b_n)$ e uno scalare λ, si possono definire alcune operazioni:

- somma tra vettori: $r_1 + r_2 = (a_1 + b_2, ..., a_n + b_n)$
- moltiplicazione di un vettore per uno scalare: $\lambda \cdot r_1 = (\lambda a_1, ..., \lambda a_n)$

Una **combinazione lineare** di m vettori con n componenti (n-uple) è un vettore che si ottiene tramite somme dei vettori moltiplicati per degli scalari: se $r_1, ..., r_m \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$, allora

$$\lambda_1 r_1 + \cdots + \lambda_m r_m$$

è una combinazione lineare di $r_1, ..., r_m$ (tramite i *coefficienti* $\lambda_1, ..., \lambda_m$).

Se $m = 1$, la combinazione lineare di un solo vettore è un "multiplo" del vettore, cioè il vettore moltiplicato per uno scalare.

4.1 Esempi

$$n = 3 \quad m = 2$$
$$r_1 = (2, 1, 0) \qquad r_2 = (0, 1, 1) \qquad r_1, r_2 \in \mathbb{R}^3$$

Esempi di combinazioni lineari di r_1 e r_2:

$$r_1 + r_2 = (2, 2, 1)$$
$$2r_1 + 3r_2 = (4, 2, 0) + (0, 3, 3) = (4, 5, 3)$$

$$r_3 = (0, 1, 0) \qquad r_4 = (0, 2, 0)$$

$$r_4 = 2r_3 \implies r_4 \text{ è una combinazione lineare di } r_3$$

$$(0,1), (2,3), (1,0) \in \mathbb{R}^2$$

$(2,3)$ è una combinazione lineare di $(0,1)$ e $(1,0)$:

$$(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1) = (2,0) + (0,3)$$

Non è possibile scrivere $(1,0)$ come combinazione lineare di $(0,1)$: non esiste λ tale che $(1,0) = \lambda(0,1)$ perché $\lambda(0,1) = (0,\lambda)$.

4.2 Dipendenza e indipendenza lineare

Un vettore r **dipende linearmente** dai vettori $r_1, ..., r_m$ se r è una combinazione lineare di $r_1, ..., r_m$.

Un insieme di vettori è **linearmente indipendente** se nessuno dei vettori dipende dagli altri.

5 Dipendenza lineare e determinante

Se in una matrice quadrata $A \in M_n$ una riga (o colonna) è combinazione lineare delle altre, allora $\det A = 0$.

5.1 Esempi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

La seconda riga è combinazione lineare della prima: $(2,4) = 2(1,2)$. Vale anche il contrario: $(1,2) = \frac{1}{2}(2,4)$. Infatti: $\det A = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

La seconda riga è combinazione lineare della prima (e viceversa): $(3,-3) = 3(1,-1)$. Allo stesso modo, la seconda colonna è combinazione lineare della prima (e viceversa): $(-1,-3) = -1(1,3)$. Quindi $\det A = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

La terza riga è combinazione lineare della prima e della seconda:

$$(1,1,5) = (1,0,2) + (0,1,3)$$
$$\det A = 5 + 0 + 0 - 2 - 3 - 0 = 5 - 5 = 0$$

6 Rango

Data una matrice $A \in M_{n,m}$ (*anche non quadrata*), il suo **rango** $\operatorname{rg} A$ (o $\operatorname{rank} A$) è l'ordine massimo di un minore non nullo di A.

Il rango di A è quindi un numero intero tale che $0 \leq \operatorname{rg} A \leq \min(n, m)$. Inoltre, $\operatorname{rg} A = 0$ se e solo se tutti gli elementi di A sono 0.

6.1 Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2,3}$$

Non possono esserci sottomatrici quadrate 3×3.

Sottomatrici quadrate 2×2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$$

Quindi $\operatorname{rg} A = 2$.

6.2 Righe e colonne linearmente indipendenti

Il rango di una matrice corrisponde al numero di righe (e colonne) linearmente indipendenti.

6.2.1 Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,3}$$

Sottomatrici quadrate 2×2:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 0 \qquad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

Tutte le sottomatrici 2×2 hanno $\det = 0$, quindi $\operatorname{rg} A < 2$. In questo caso, $\operatorname{rg} A = 1$:

- una sola riga è linearmente indipendente e l'altra è una sua combinazione lineare
- una sola colonna è linearmente indipendente e le altre due sono sue combinazioni lineari