Azzolini Riccardo 2018-10-09

Partizioni e relazioni d'ordine

1 Proprietà delle classi di equivalenza

Data una relazione di equivalenza R su A:

1. se $a \not R b$ allora $[a]_R \cap [b]_R = \varnothing$
2. $a \in [a]_R$ quindi $[a]_R \neq \varnothing$ per ogni $a \in A$
3. l'unione di tutte le classi di equivalenza modulo R è A:

   $$\bigcup_{a \in A} [a]_R = A$$

   dove

   $$\bigcup_{a \in A} [a]_R$$

   si legge "l'unione degli insiemi $[a]_R$ al variare di a in A"

1.1 Esempio

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$R = \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(2,3),(3,2)\} \cup \{(x,x) \mid x \in A\}$ è una relazione di equivalenza

$$[1]_R = \{a \in A \mid 1Ra\} = \{1, 2, 3\}$$
$$[4]_R = \{4\}$$

Valgono le proprietà delle relazioni di equivalenza:

1. $1 \not R 4 \implies [1]_R \cap [4]_R = \varnothing$
2. $1 \in [1]_R$
3. $[1]_R \cup [4]_R = \{1, 2, 3\} \cup \{4\} = \{1, 2, 3, 4\} = A$

2 Partizione

Una **partizione** F di un insieme A è una famiglia di sottoinsiemi di A (quindi $F \subseteq \mathcal{P}(A)$), tale che:

1. ogni elemento di F è diverso dall'insieme vuoto:

$$\forall X \in F, \quad X \neq \varnothing$$

2. gli elementi di F sono disgiunti:

$$\forall X, Y \in F, \quad X \cap Y = \varnothing$$

3. l'unione degli elementi di F è tutto l'insieme A:

$$\bigcup_{X \in F} X = A$$

Gli elementi di una partizione si chiamano **blocchi**.

3 Corrispondenza tra partizione e relazione di equivalenza

Se R è una relazione di equivalenza su A, allora A/R è una partizione di A.

Viceversa, se F è una partizione di A, allora la relazione R_F definita da

$$xR_Fy \text{ se e solo se } x \text{ e } y \text{ appartengono allo stesso blocco di } F$$

è una relazione di equivalenza tale che $A/R_F = F$

3.1 Esempio

$$A = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$F = \{\{a, e\}, \{b, d, f\}, \{c\}\} \subseteq \mathcal{P}(A) \text{ è una partizione di } A$$

$$R_F = \{(a, a), (e, e), (a, e), (e, a), (b, b), (d, d), (f, f), (b, d), (d, b), (b, f), (f, b), (d, f), (f, d), (c, c)\}$$
$$A/R_F = F$$

4 Relazione antisimmetrica

Una relazione binaria R su A è **antisimmetrica** se per ogni $a, b \in A$, se aRb e bRa allora $a = b$:

$$\forall a, b \in A, \quad aRb \text{ AND } bRa \implies a = b$$

Equivalentemente, se $a \neq b$ non possono valere sia aRb che bRa.

Non è antisimmetrica se esistono $a, b \in A$ tali che $a \neq b$, ma aRb e bRa.

4.1 Nel diagramma di Venn

Non devono esserci elementi collegati tra loro in entrambe le direzioni.

5 Relazione d'ordine

Una relazione binaria R su A si dice una **relazione d'ordine** se è *riflessiva*, *antisimmetrica* e *transitiva*.

Se R è una relazione d'ordine e aRb, si scrive $a \leq b$ e si dice che:

- *a è più piccolo di b* rispetto a R
- *b è più grande di a* rispetto a R

5.1 Diagramma di Hasse

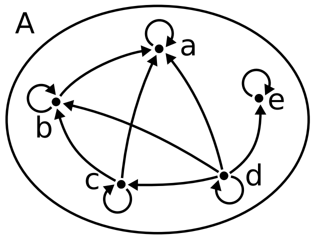
È un modo di rappresentare una relazione d'ordine R, derivato dal diagramma di Venn:

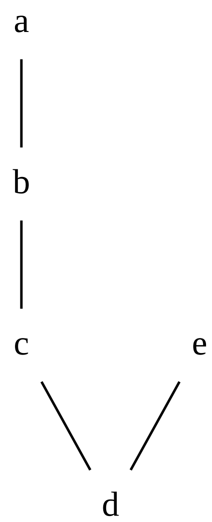
- si mettono più in basso gli elementi più piccoli rispetto a R
- non si rappresentano i collegamenti relativi alla riflessività (ogni elemento con sé stesso)
- due elementi x e y si collegano tra loro solo se *y copre x*, cioè se xRy e non esiste uno z diverso da x e y tale che $xRzRy$ (o, in altre parole, non ci sono elementi "in mezzo" tra x e y), quindi vengono omessi anche i collegamenti che testimoniano la transitività

5.2 Esempi su insieme finito

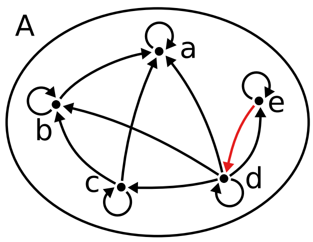
$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

$R = \{(d, c), (d, e), (c, b), (d, b), (b, a), (d, a), (c, a)\} \cup \{(x, x) \mid x \in A\}$ è una relazione d'ordine





$R' = R \cup \{(e, d)\}$ non è una relazione d'ordine (né di equivalenza)



5.3 Esempio: minore o uguale

La relazione di minore o uguale tra numero è la relazione d'ordine "per eccellenza".

Esempio di diagramma di Hasse su un sottoinsieme finito di $\mathbb{N}$:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

5
|
4
|
3
|
2
|
1

Questo diagramma di Hasse, che per la sua particolare forma prende il nome di *catena*, evidenzia che tutti gli elementi sono in relazione tra loro.

6 Minimo, massimo, minimale e massimale

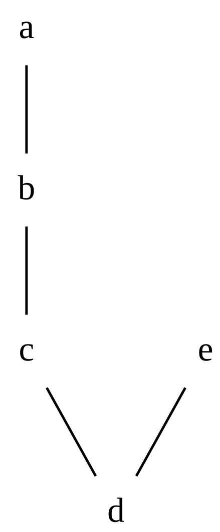
Se R è una relazione d'ordine su A:

- $m \in A$ si dice **minimo** rispetto a R se per ogni $a \in A$ si ha mRa, cioè $m \leq a$
- $M \in A$ si dice **massimo** rispetto a R se per ogni $a \in A$ si ha aRM, cioè $a \leq M$
- $b \in A$ è **minimale** se non esistono $a \in A$ tali che aRb, cioè $a \leq b$
- $b \in A$ è **massimale** se non esistono $a \in A$ tali che bRa, cioè $b \leq a$

Se c'è un solo elemento minimale, esso è il minimo. Se invece ce n'è più di uno, non esiste un minimo. La stessa regola vale per massimale e massimo.

6.1 Esempio

Nella relazione d'ordine rappresentata da questo diagramma di Hasse:



- l'elemento d è il *minimo*
- gli elementi a ed e sono *massimali* (e quindi non c'è un *massimo*)