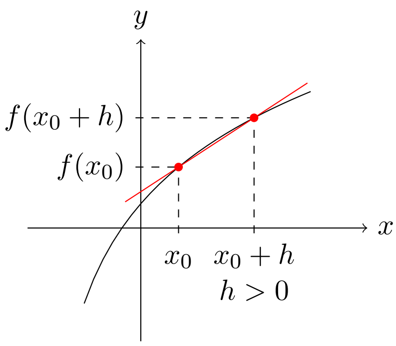
Azzolini Riccardo 2019-04-03

Derivate

1 Rapporto incrementale

Data una funzione $f(x)$, il coefficiente angolare m della retta passante per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, con $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (può essere anche negativo),



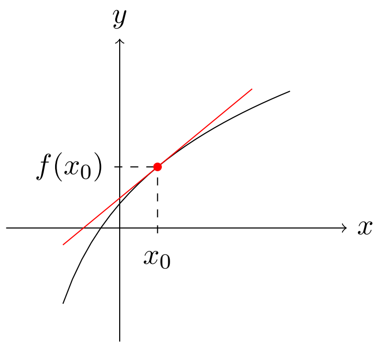
è uguale al **rapporto incrementale** con *incremento* h:

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Se esiste ed è finito

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

questo limite è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di $y = f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$.



Scegliendo $h = x - x_0$, il limite del rapporto incrementale si può scrivere anche come

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

2 Derivata

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x)$$

è la **derivata** di f in x_0, se il limite esiste ed è finito.

Se $\exists f'(x_0)$, f si dice **derivabile** in x_0.

Nota: Esistono anche altre notazioni per la derivata, tra cui ad esempio:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = D_x f(x_0)$$

3 Equazione della retta tangente al grafico

L'equazione della retta tangente al grafico di $y = f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$ è

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

4 Continuità di funzioni derivabili

Sia f una funzione derivabile in x_0. Allora f è continua in x_0.

Dimostrazione: Per ipotesi, esiste ed è finito

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Allora,

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = 0$$

cioè

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) &= o(1) \quad \text{per } x \to x_0 \\ \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} &= o(1) \\ f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) &= o(1)(x - x_0) \\ f(x) &= f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)(x - x_0)}_{\to 0} + \underbrace{o(1)(x - x_0)}_{\to 0} \end{aligned}$$

ovvero

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

quindi f è continua in x_0. $\square$

Osservazioni:

- Se \$f(x) è derivabile in x_0, la retta tangente al grafico in $(x_0, f(x_0))$ è quella che meglio approssima la funzione "vicino" a x_0, dato che

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{\text{retta tangente}} + \underbrace{o(1)(x - x_0)}_{\text{tende a 0 velocemente}} \quad \text{per } x \to x_0$$

- Non tutte le funzioni continue sono derivabili. Ad esempio, $f(x) = |x|$ è continua in $x_0 = 0$,

$$\lim_{x\to 0} |x| = 0 = |0|$$

ma non è derivabile in $x_0 = 0$ perché

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1 \end{aligned}\right\} \implies \nexists \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

5 Derivate di alcune funzioni elementari

- $f(x) = ax + b \qquad a, b, x_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{ax + b - (ax_0 + b)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{ax + b - ax_0 - b}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= a \end{aligned}$$

Nel caso $a = 0$, cioè se f è una funzione costante $f(x) = b$, la sua derivata è sempre $f'(x_0) = 0$.

- $f(x) = x^2 \qquad x_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} (x + x_0) \\ &= x_0 + x_0 \\ &= 2x_0 \end{aligned}$$

- $f(x) = x^3 \qquad x_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)\left(x^2 + x x_0 + x_0^2\right)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \left(x^2 + x x_0 + x_0^2\right) \\
&= x_0^2 + x_0 x_0 + x_0^2 \\
&= 3x_0^2
\end{aligned}$$

- $f(x) = x^n \qquad n \in \mathbb{N},\ x_0 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = n x_0^{n-1}$$

- $f(x) = x^\alpha \qquad \alpha, x_0 \in \mathbb{R},\ x_0 > 0$

$$f'(x_0) = \alpha x_0^{\alpha-1}$$

- $f(x) = e^x \qquad x_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0} e^h - e^{x_0}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} e^{x_0} \frac{e^h - 1}{h} \\
&= e^{x_0}
\end{aligned}$$

- $f(x) = \sin x \qquad x_0 \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h)-\sin x_0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x_0 \cos h + \sin h \cos x_0 - \sin x_0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\sin x_0 \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x_0 \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} \right] \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\sin x_0 \underbrace{\frac{-\frac{h^2}{2}}{h}}_{\to 0} + \cos x_0 \right] \\
&= \cos x_0
\end{aligned}
$$

- $f(x) = \cos x \qquad x_0 \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x_0+h)-\cos x_0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x_0 \cos h - \sin x_0 \sin h - \cos x_0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\cos x_0 \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0} - \sin x_0 \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} \right] \\
&= -\sin x_0
\end{aligned}
$$

6 Funzione derivata

Se f è derivabile $\forall x \in X$, si definisce la **funzione derivata** di f come $y = f'(x) \quad \forall x \in X$.

7 Derivata di una combinazione lineare

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambe derivabili in x_0, allora una loro combinazione lineare $af(x) + bg(x)$, con $a, b \in \mathbb{R}$, è derivabile in x_0 e si ha

$$[af(x) + bg(x)]' = af'(x) + bg'(x)$$

7.1 Esempio

$$\begin{aligned} f(x) &= 6x^9 - 5x^3 + 2x^2 - x + 1 \\ f'(x) &= 6 \cdot 9x^8 - 5 \cdot 3x^2 + 2 \cdot 2x - 1 \\ &= 54x^8 - 15x^2 + 4x - 1 \end{aligned}$$

8 Derivate successive

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ (dove I è un intervallo) una funzione derivabile $\forall x \in I$, e sia $f'(x)$ derivabile $\forall x \in I$. Allora

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

è la **derivata seconda** di f, e si dice che f è *derivabile due volte.*

In generale, se $f^{(n-1)}(x)$ è derivabile $\forall x \in I$,

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)}{h}$$

è la **derivata n-esima** (o **derivata di ordine n**) di f, e f si dice *derivabile n volte.*

9 Classi C^n

1. Se una funzione f è continua $\forall x \in X$, si scrive $f \in C(X)$.
2. Se una funzione f è derivabile, con derivata continua, $\forall x \in X$, si dice che f è di classe C^1 in X, e si scrive $f \in C^1(X)$.
3. Se f è una funzione derivabile n volte, con derivata n-esima continua, $\forall x \in X$, si dice che f è di classe C^n in X, e si scrive $f \in C^n(X)$.
4. f è di classe C^∞ in X, $f \in C^\infty(X)$, se è derivabile infinite volte, cioè se $f \in C^n(X)$ per ogni n. Alcuni esempi sono e^x, $\sin x$, $\cos x$, e i polinomi (anche se le derivate di questi ultimi, da un certo ordine in poi, sono tutte 0).

Osservazione: Se una funzione è derivabile n volte, le derivate di ordine inferiore a n sono sicuramente continue, altrimenti non potrebbero essere derivabili, e allora non esisterebbe la derivata di ordine n.

10 Classificazione dei punti di non derivabilità

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione continua in un punto x_0 interno a X. Si suppone che esistano i due limiti

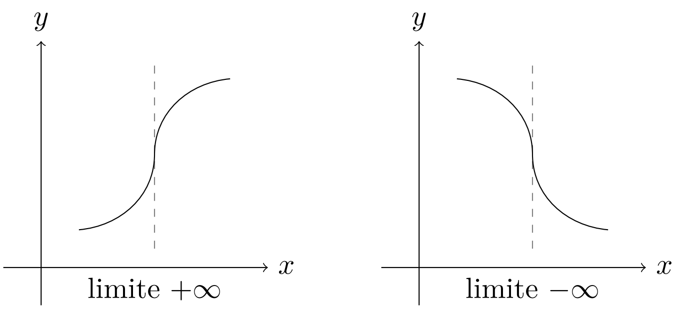
$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

(per evitare casi "troppo patologici").

- Se

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$$

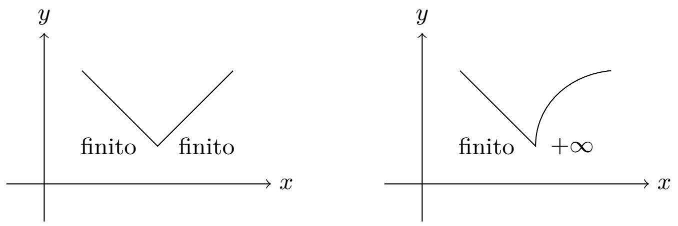
  allora $(x_0, f(x_0))$ è un **punto (di flesso) con tangente verticale**.



- Se almeno uno tra i limiti

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

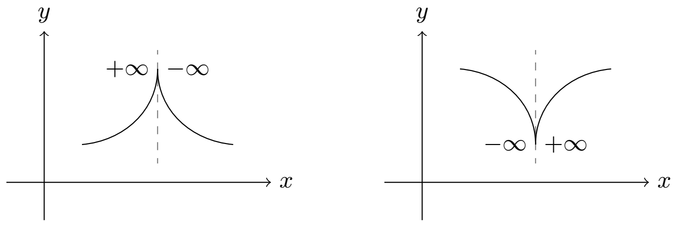
  è finito, il punto $(x_0, f(x_0))$ si dice **punto angoloso**.



- Se

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty \qquad \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = -\infty$$

o viceversa, il punto $(x_0, f(x_0))$ si chiama **cuspide**.



10.1 Esempi

- $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}, \quad x_0 = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \qquad \forall x \neq 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{0}}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

In $x_0 = 0$, il grafico di $y = \sqrt[3]{x}$ ha una retta tangente verticale.

- $f(x) = |x|$ in $x_0 = 0$ ha un punto angoloso:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|-|0|}{x-0} = 1 \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|-|0|}{x-0} = -1$$

- $f(x) = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}, \quad x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{-x}-\sqrt{0}}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(-x)^{\frac{1}{2}}}{-(-x)} = \lim_{x\to 0^-} \left(-\frac{1}{(-x)^{\frac{1}{2}}}\right) = -\infty$$

Il punto di non derivabilità $x_0 = 0$ è una cuspide.