Azzolini Riccardo 2019-05-15

Numeri complessi

1 Moltiplicazione in forma trigonometrica

Se $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ e $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, allora:

$$
\begin{aligned}
z_1z_2 &= |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\
&= |z_1| \cdot |z_2|(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) \\
&= |z_1| \cdot |z_2|\Big[\underbrace{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2)}_{\cos(\varphi_1+\varphi_2)} + i\underbrace{(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)}_{\sin(\varphi_1+\varphi_2)}\Big] \\
\implies z_1z_2 &= |z_1| \cdot |z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))
\end{aligned}
$$

Quindi, per moltiplicare due numeri complessi in forma trigonometrica, si moltiplicano i moduli e si sommano gli argomenti:

$$
\begin{aligned}
|z_1z_2| &= |z_1| \cdot |z_2| \\
\arg(z_1z_2) &= \arg z_1 + \arg z_2
\end{aligned}
$$

1.1 Corollario: divisione

Siano $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, con $z_2 \neq 0$. Allora:

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{z_1}{z_2}\right| &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \\
\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= \arg z_1 - \arg z_2 \quad \text{(se anche } z_1 \neq 0\text{)}
\end{aligned}
$$

Dimostrazione: Sia

$$
z = \frac{z_1}{z_2} \implies zz_2 = z_1
$$

Per la regola della moltiplicazione in forma trigonometrica:

$$\begin{aligned} |zz_2| = |z| \cdot |z_2| = |z_1| &\implies |z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \\ \arg(zz_2) = \arg z + \arg z_2 = \arg z_1 &\implies \arg z = \arg z_1 - \arg z_2 \qquad \square \end{aligned}$$

2 Potenze

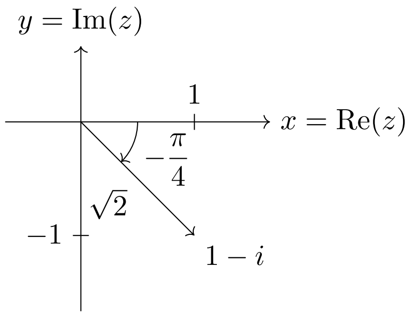
Se $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, allora:

$$\begin{aligned} z^2 &= z \cdot z = |z|^2(\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi)) \\ z^3 &= z \cdot z^3 = |z|^3(\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi)) \\ &\vdots \\ z^n &= |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)), \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

In forma algebrica, è invece necessario calcolare l'n-esima potenza del binomio, che è complicato per n non piccoli. Perciò, conviene solitamente calcolare le potenze in forma trigonometrica.

2.1 Esempio

$$\begin{aligned} z &= 1 - i \\ |z| &= \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \\ \varphi = \operatorname{Arg} z &= -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$



$$
\begin{aligned}
(1-i)^{15} &= \left(\sqrt{2}\right)^{15}\left(\cos\left(-\frac{15}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{15}{4}\pi\right)\right)\\
&= \left(\sqrt{2}\right)^{15}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \left(\sqrt{2}\right)^{15}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\
&= \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{16}}{2}+i\frac{\left(\sqrt{2}\right)^{16}}{2}\\
&= 2^7+i2^7
\end{aligned}
$$

2.2 Formula di De Moivre

Nel caso particolare in cui $|z|=1$, cioè $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$, la regola per il calcolo delle potenze prende il nome di **formula di De Moivre**:

$$
z^n=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi),\quad n\in\mathbb{N}
$$

3 Funzione esponenziale in campo complesso

Sia $z=x+iy,\ x,y\in\mathbb{R}$. L'esponenziale in campo complesso, e^z, è definita come:

$$
e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)
$$

In particolare, se z è reale, cioè $z=x+0i$, allora

$$
e^z=e^x(\cos 0+i\sin 0)=e^x(1+0)=e^x
$$

quindi questa definizione generalizza l'esponenziale in campo reale.

La funzione $f(z)=e^z$ è periodica di periodo $2\pi i$:

$$
\begin{aligned}
e^{z+2\pi i} &= e^{x+iy+2\pi i}\\
&= e^{x+i(y+2\pi)}\\
&= e^x(\cos(y+2\pi)+i\sin(y+2\pi))\\
&= e^x(\cos y+i\sin y)=e^z
\end{aligned}
$$

3.1 Proprietà

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2} \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
2. $(e^z)^n = e^{nz} \quad \forall z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$
3. $e^{2k\pi i} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

3.1.1 Dimostrazione della 1

Siano $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$.

$$
\begin{aligned}
e^{z_1+z_2} &= e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} \\
&= e^{x_1+x_2}\Big[\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)\Big] \\
&= e^{x_1} \cdot e^{x_2}\Big[\overbrace{\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2}^{\cos(y_1+y_2)} + i(\overbrace{\sin y_1 \cos y_2 + \sin y_2 \cos y_1}^{\sin(y_1+y_2)})\Big] \\
&= e^{x_1} \cdot e^{x_2}\Big[\cos y_1(\cos y_2 + i\sin y_2) + \sin y_1(-\sin y_2 + i\cos y_2)\Big] \\
&= e^{x_1} \cdot e^{x_2}\left[\cos y_1(\cos y_2 + i\sin y_2) + i\sin y_1\left(-\frac{\sin y_2}{i} + \cos y_2\right)\right] \\
&= e^{x_1} \cdot e^{x_2}\left[\cos y_1(\cos y_2 + i\sin y_2) + i\sin y_1\left(-\frac{\sin y_2}{i} \cdot \frac{i}{i} + \cos y_2\right)\right] \\
&= e^{x_1} \cdot e^{x_2}\Big[\cos y_1(\cos y_2 + i\sin y_2) + i\sin y_1(i\sin y_2 + \cos y_2)\Big] \\
&= e^{x_1} \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2)(\cos y_1 + i\sin y_1) \\
&= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) \\
&= e^{z_1} \cdot e^{z_2} \qquad \square
\end{aligned}
$$

3.1.2 Dimostrazione della 2

$$
\begin{aligned}
(e^z)^n &= [e^x(\cos y + i\sin y)]^n \\
&= (e^x)^n(\cos(ny) + i\sin(ny)) \\
&= e^{nx}(\cos(ny) + i\sin(ny)) \\
&= e^{nx+iny} = e^{nz} \qquad \square
\end{aligned}
$$

3.1.3 Dimostrazione della 3

$$e^{2k\pi i} = e^{0+i(2k\pi)} = e^0(\cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi)) = 1 \cdot (1 + 0i) = 1 \qquad \square$$

4 Forma esponenziale

Un numero complesso $z \neq 0$ si può scrivere in **forma esponenziale**:

$$\begin{aligned} z &= |z|(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)) \\ &= \boxed{|z|\, e^{i \arg z}} \end{aligned}$$

5 Radici nel campo complesso

Siano $w \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Le **radici n-esime nel campo complesso** di w sono le soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^n = w \quad (\text{con } z \in \mathbb{C})$$

Se $w = 0$, l'unica soluzione di $z^n = 0$ è $z = 0$. Altrimenti, se $w \neq 0$ (e quindi anche $z \neq 0$), i due numeri si possono scrivere in forma trigonometrica:

$$\begin{aligned} z &= |z|(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)) \\ w &= |w|(\cos(\arg w) + i\sin(\arg w)) \end{aligned}$$

Allora, per le regole della potenza e dell'uguaglianza in forma trigonometrica:

$$\begin{aligned} z^n = w &\iff |z|^n(\cos(n \arg z) + i\sin(n \arg z)) = |w|(\cos(\arg w) + i\sin(\arg w)) \\ &\iff \begin{cases} |z|^n = |w| \\ n \arg z = \arg w + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|w|} \\ \arg z = \dfrac{\arg w + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

L'argomento della soluzione ottenuta con $k = n$ è

$$\arg z = \frac{\arg w + 2n\pi}{n} = \frac{\arg w}{n} + 2\pi \equiv \underbrace{\frac{\arg w}{n}}_{k=0}$$

che equivale all'argomento calcolato con $k = 0$: in generale, a $k = k_0$ e $k = k_0 + n$ corrisponde la stessa soluzione. Di conseguenza, si ottengono tutte e sole le radici n-esime di w facendo variare k da 0 a $n-1$. Quindi, la formula per determinare tutte le radici in campo complesso è

$$z^n = w \iff \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|w|} \\ \arg z = \dfrac{\arg w + 2k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

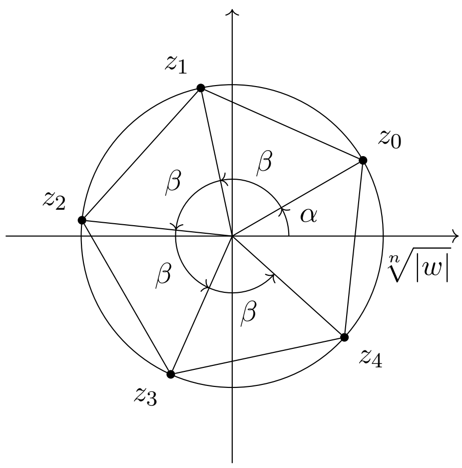
e ogni w ha esattamente n radici n-esime distinte (a differenza delle radici in campo reale).

5.1 Sul piano cartesiano

Le radici n-esime di w si trovano tutte su una circonferenza di raggio $\sqrt[n]{|w|}$ centrata nell'origine (perché hanno tutte lo stesso modulo).

Più precisamente, le radici sono i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto in tale circonferenza:

$$\arg z = \frac{\arg w + 2k\pi}{n} = \underbrace{\frac{\arg w}{n}}_{\alpha} + k \underbrace{\frac{2\pi}{n}}_{\beta}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$



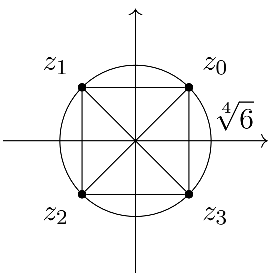
5.2 Esempio

Si vogliono trovare le radici quarte di -6:

$$n = 4 \qquad w = -6 \implies \begin{matrix} |w| = |-6| = 6 \\ \operatorname{Arg} w = \pi \end{matrix}$$

$$z^4 = -6 \iff \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|w|} = \sqrt[4]{6} \\ \arg z = \dfrac{\arg w + 2k\pi}{n} = \dfrac{\pi + 2k\pi}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[4]{6}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ z_1 &= \sqrt[4]{6}\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right) \\ z_2 &= \sqrt[4]{6}\left(\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right)\right) \\ z_3 &= \sqrt[4]{6}\left(\cos\left(\frac{7}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{4}\pi\right)\right) \end{aligned}$$



6 Teorema fondamentale dell'algebra

Sia

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

un polinomio complesso, con $a_j \in \mathbb{C},\ j = 0, \ldots, n,\ a_n \neq 0$ e $z \in \mathbb{C}$. Allora, esistono $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ tali che

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$$

z_j sono le radici del polinomio, e sono sempre esattamente n (ma non necessariamente distinte), a differenza di ciò che accade in campo reale, nel quale esistono, ad esempio, polinomi di secondo grado irriducibili.

6.1 Con coefficienti reali

Osservazione: Nel caso in cui $p(z),\ z \in \mathbb{C}$ ha tutti i coefficienti reali, se $w \in \mathbb{C}$ è una radice di $p(z)$, allora lo è anche il suo coniugato $\overline{w}$.

Dimostrazione:

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad a_j \in \mathbb{R},\ a_n \neq 0$$

Sia $w \in \mathbb{C}$ una radice di $p(z)$, cioè

$$0 = p(w) = a_n w^n + a_{n-1} w^{n-1} + \cdots + a_1 w + a_0$$

Sostituendo i membri dell'uguaglianza con i rispettivi coniugati, siccome $\overline{0} = 0$ e, in generale, $\overline{r} = r \quad \forall r \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$\begin{aligned} 0 = \overline{p(w)} &= \overline{a_n w^n + \cdots + a_0} \\ &= \overline{a_n}(\overline{w})^n + \cdots + \overline{a_0} \\ &= a_n(\overline{w})^n + \cdots + a_0 \\ &= p(\overline{w}) \end{aligned}$$

cioè $p(\overline{w}) = 0$, ovvero $\overline{w}$ è radice di $p(z)$. $\square$

6.2 Esempio

$$p(z) = z^2 + z + 1$$

Siccome $\Delta = -3 < 0$, $p(z)$ è irriducibile in campo reale. Invece, per il teorema fondamentale dell'algebra, in campo complesso è sicuramente riducibile e ha esattamente due radici, z_1 e z_2.

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \qquad \sqrt{-3} = \sqrt{3(-1)} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{3} \cdot i$$

$$\implies z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = \overline{z_1}$$

Le due radici sono una il coniugato dell'altra perché $p(z)$ ha coefficienti reali.