Azzolini Riccardo 2020-03-10

Calcolo combinatorio – Applicazione al calcolo delle probabilità

1 Problema: terno al lotto

Problema: Qual è la probabilità di fare un terno al lotto giocando i numeri 9, 13 e 87 su una singola ruota (dalla quale vengono estratte 5 palline diverse)?

Per poter risolvere il problema, bisogna prima definire con precisione l'evento A considerato: affermare che

$$A = \text{“esce una cinquina con i numeri 9, 13, 87”}$$

non è sufficiente, perché non è chiaro se si debba considerare o meno l'ordine dei numeri nella cinquina. In questo caso, a scopo illustrativo, si sceglie di trattare (separatamente) entrambe le varianti:

- il caso in cui si vince con una “terna semplice”, cioè trascurando l'ordine dei numeri estratti;
- il caso di una “terna secca”, nel quale si richiede che i numeri 9, 13 e 87 siano esattamente il primo, secondo e terzo dei cinque estratti.

1.1 Terna semplice

Nel caso della terna semplice, non è necessario considerare l'ordine delle estrazioni, che quindi possono essere rappresentate come insiemi di 5 numeri diversi, ovvero lo spazio campionario è:

$$\Omega = \{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\} \mid \omega_i \in \{1, 2, \dots, 90\}\ \forall i,\ \omega_i \neq \omega_j\ \forall i \neq j\}$$

L'evento A comprende tutte le estrazioni che contengono i numeri 9, 13, e 87. Per definirlo, è utile iniziare enumerando alcuni suoi elementi:

$$A = \{\{9, 13, 87, 1, 2\},\ \{9, 13, 87, 1, 3\},\ \{9, 13, 87, 2, 3\},\ \dots\}$$

Invece, non bisogna considerare, ad esempio:

- $\{13, 9, 87, 1, 2\}$, perché (in questo problema, ma anche in generale negli insiemi) l'ordine viene trascurato, e di conseguenza esso è equivalente a $\{9, 13, 87, 1, 2\}$, già presente in A;
- $\{9, 13, 87, 1, 9\}$, perché lo stesso numero non può uscire due volte in una stessa estrazione al lotto.

Una definizione precisa di A è quindi:

$$A = \{\{9, 13, 87, \omega_1, \omega_2\} \mid \omega_1, \omega_2 \in \{1, \dots, 90\} \setminus \{9, 13, 87\},\ \omega_1 \neq \omega_2\}$$

Siccome lo spazio di probabilità considerato è finito, e supponendo che esso sia anche uniforme, la probabilità di A può essere calcolata con la formula

$$P(A) = \frac{\# A}{\# \Omega}$$

Bisogna allora determinare le cardinalità di A e Ω, sfruttando gli strumenti del calcolo combinatorio.

Per ricavare $\# A$, si osserva che ogni elemento di A è un insieme composto da tre numeri fissati (9, 13, 87) e due che variano; inoltre, questi ultimi due devono essere diversi tra loro e dai tre numeri fissati. Considerando solo i due numeri variabili, si costruisce l'insieme

$$B = \{\{\omega_1, \omega_2\} \mid \omega_1, \omega_2 \in \{1, \dots, 90\} \setminus \{9, 13, 87\},\ \omega_1 \neq \omega_2\}$$

che può essere messo in **corrispondenza biunivoca** con A (in simboli, $A \leftrightarrow B$): ogni elemento $\{\omega_1, \omega_2\}$ di B corrisponde a uno e un solo elemento di A, $\{9, 13, 87, \omega_1, \omega_2\}$, e viceversa. Perciò, A e B devono avere la stessa cardinalità.

Siccome B è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di $\{1, \dots, 90\} \setminus \{9, 13, 87\}$ di 2 elementi, e

$$\#(\{1, \dots, 90\} \setminus \{9, 13, 87\}) = 90 - 3 = 87$$

la cardinalità di B (e di A) è data dal numero di **combinazioni**[1] di 87 elementi a gruppi di 2:

$$\# A = \# B = C_{87,2} = \binom{87}{2} = \frac{87!}{(87-2)!\,2!} = \frac{87!}{85!\ 2!}$$

Analogamente, la cardinalità dello spazio campionario Ω è il numero di combinazioni di 90 elementi a gruppi di 5:

$$\# \Omega = C_{90,5} = \binom{90}{5} = \frac{90!}{(90-5)!\,5!} = \frac{90!}{85!\,5!}$$

[1] Le combinazioni $C_{n,k}$ sono, appunto, i sottoinsiemi di k elementi scelti da un insieme di n elementi. In altre parole, esse corrispondono a tutti possibili i modi di scegliere k elementi *diversi* (senza ripetizioni) tra gli n disponibili, senza considerare l'ordine.

Avendo calcolato le cardinalità, si può infine ricavare la probabilità dell'evento A:

$$P(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{\frac{87!}{85!\,2!}}{\frac{90!}{85!\,5!}} = \frac{87!\,85!\,5!}{90!\,85!\,2!} = \frac{87!\,5!}{90!\,2!} = \frac{87! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87! \cdot 2} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{90 \cdot 89 \cdot 88}$$
$$\approx 8.51 \cdot 10^{-5}$$

1.2 Terna secca

In questo caso, si considera l'evento

$A =$ "9, 13 e 87 sono il primo, secondo e terzo numero della cinquina estratta"

Dovendo tenere conto dell'ordine, le estrazioni vengono rappresentate non come insiemi, bensì come n-uple di cinque elementi (distinti), cioè appunto cinquine:

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5) \mid \omega_i \in \{1, 2, \dots, 90\}\ \forall i,\ \omega_i \neq \omega_j\ \forall i \neq j\}$$

Anche gli elementi di A sono quindi n-uple. Come prima, enumerare alcune di esse aiuta a definire l'evento A:

$$\begin{aligned} A &= \{\overbrace{(9, 13, 87, 1, 2),\ (9, 13, 87, 2, 1)}^{\text{si considera l'ordine}},\ (9, 13, 87, 1, 3),\ \dots\} \\ &= \{(9, 13, 87, \omega_1, \omega_2) \mid \omega_1, \omega_2 \in \{1, \dots, 90\} \setminus \{9, 13, 87\},\ \omega_1 \neq \omega_2\} \end{aligned}$$

Sempre analogamente al caso precedente, si osserva che i primi tre elementi delle cinquine appartenenti ad A sono fissati, quindi si ha una corrispondenza biunivoca con l'insieme contenente solo le coppie formate dai due elementi variabili:

$$A \leftrightarrow B = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_1, \omega_2 \in \{1, \dots, 90\} \setminus \{9, 13, 87\},\ \omega_1 \neq \omega_2\}$$

Così, è possibile calcolare la cardinalità $\# A = \# B$, che corrisponde al numero di **disposizioni semplici**[2] di 2 oggetti scelti da un insieme di 87:

$$\# A = \# B = D_{87,2} = \frac{87!}{(87-2)!} = 87 \cdot 86$$

Con lo stesso strumento si calcola anche la cardinalità dello spazio campionario:

$$\# \Omega = D_{90,5} = \frac{90!}{(90-5)!} = 90 \cdot 89 \cdots (90 - 5 + 1) = 90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86$$

La probabilità di A è allora:

$$P(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{87 \cdot 86}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{1}{90 \cdot 89 \cdot 88} \approx 1.41 \cdot 10^{-6}$$

[2]Le disposizioni semplici $D_{n,k}$ sono tutti i modi di scegliere k elementi *diversi* tra gli n disponibili, considerando l'ordine (a differenza delle combinazioni).

2 Problema: compleanni

Problema: Qual è la probabilità che, tra n persone scelte a caso, almeno due festeggino il compleanno nello stesso giorno?

Per modellare questo problema, si sceglie uno spazio campionario tale che ogni suo elemento sia una n-upla di numeri, che indicano i compleanni delle n persone:

$$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \omega_i \in \{1, \dots, 365\}\}$$

In altre parole, gli elementi di Ω sono tutte le possibili combinazioni[3] di n compleanni.

Come evento, si considerano tutte le n-uple nelle quali esistono (almeno) due compleanni uguali:

$$A = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega \mid \exists (i, j),\ i \neq j,\ \omega_i = \omega_j\}$$

Tuttavia, è difficile calcolare direttamente la cardinalità di questo insieme. Invece, il suo complementare, cioè l'insieme delle combinazioni[3] di n compleanni tutti diversi,

$$A^{\mathsf{c}} = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega \mid \omega_i \neq \omega_j\ \forall i \neq j\}$$

è più facile da trattare: la sua cardinalità è il numero di disposizioni semplici di n oggetti scelti da un insieme di 365:

$$\#\, A^{\mathsf{c}} = D_{365,n} = \frac{365!}{(365-n)!} = 365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)$$

Poi, si determina anche la cardinalità di Ω, i cui elementi sono tutti i modi di scegliere n elementi, anche con ripetizione, da un insieme di 365, ovvero le **disposizioni con ripetizione**:

$$\#\, \Omega = 365^n$$

Si ottiene così la probabilità di A^{c}:[4]

$$P(A^{\mathsf{c}}) = \frac{\#\, A^{\mathsf{c}}}{\#\, \Omega} = \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - n + 1)}{365^n} = \frac{364 \cdots (365 - n + 1)}{365^{n-1}}$$

Infine, per ricavare $P(A)$ (la richiesta del problema), si sfrutta una delle proprietà della probabilità P su una σ-algebra $\mathscr{A}$:

$$P(A) = 1 - P(A^{\mathsf{c}}) = 1 - \frac{364 \cdots (365 - n + 1)}{365^{n-1}}$$

Ad esempio, la probabilità che, tra cinque persone ($n = 5$), almeno due festeggino il compleanno nello stesso giorno è:

$$P(A) = 1 - \frac{364 \cdots (365 - 5 + 1)}{365^{n-1}} = 1 - \frac{364 \cdots 361}{365^{n-1}} \approx 0.03$$

[3]In questo problema, il termine "combinazioni" è usato in senso informale, con il significato che ha nel linguaggio comune.

[4]Qui si suppone, per semplificare, che lo spazio di probabilità sia uniforme: in realtà, le nascite sono più frequenti in certi periodi dell'anno.

3 Problema: pneumatici difettosi

Problema: Su un gruppo di 20 pneumatici, 3 sono difettosi. Scegliendo 4 pneumatici a caso per un controllo di qualità, qual è la probabilità che uno solo di quelli difettosi sia incluso nel gruppo scelto?

Per modellare questo problema, si scelgono come spazio campionario tutti i sottoinsiemi di cardinalità 4 dell'insieme dei 20 pneumatici:

$$\Omega = \{\omega \mid \omega \subset \{D_1, D_2, D_3, F_1, \dots, F_{17}\},\ \#\,\omega = 4\}$$

(dove D_i indica uno pneumatico difettoso, e F_i uno funzionante).

Allora, l'evento A comprende tutti gli insiemi composti da uno pneumatico difettoso e tre funzionanti:

$$\begin{aligned} A &= \text{“uno solo degli pneumatici difettosi è incluso nel gruppo scelto”} \\ &= \{\{D_1, F_1, F_2, F_3\},\ \{D_2, F_1, F_2, F_3\},\ \{D_1, F_1, F_2, F_4\},\ \dots\} \end{aligned}$$

Per calcolare $\#\,A$, è utile mettere ciascun elemento di A in corrispondenza biunivoca con una sua ***n*-upla rappresentativa**:

$$\begin{aligned} \forall a \in A \quad a &\leftrightarrow (D_s, \{F_i, F_j, F_k\}), \\ &\qquad s = 1, 2, 3,\ i \neq j,\ j \neq k,\ k \neq i \end{aligned}$$

Si evidenzia così che

- lo pneumatico difettoso D_s può essere scelto in 3 modi,
- gli pneumatici funzionanti $\{F_i, F_j, F_k\}$ possono essere scelti in

  $$C_{17,3} = \binom{17}{3} = \frac{17!}{(17-3)!\,3!} = \frac{17!}{14!\,3!}$$

  modi,

quindi, complessivamente:

$$\#\,A = 3 \cdot \frac{17!}{14!\,3!}$$

Anche la cardinalità di Ω si ricava mediante le combinazioni:

$$\#\,\Omega = C_{20,4} = \binom{20}{4} = \frac{20!}{16!\,4!}$$

Segue da tutto ciò che la probabilità dell'evento A è:

$$P(A) = \frac{\#\,A}{\#\,\Omega} = \frac{3 \cdot \dfrac{17!}{14!\,3!}}{\dfrac{20!}{16!\,4!}} = \frac{3 \cdot 17!\,16!\,4!}{20!\,14!\,3!} = \frac{17!\,16!\,4!}{20!\,14!\,2!} = \frac{16 \cdot 15 \cdot 4 \cdot 3}{20 \cdot 19 \cdot 18} \approx 0.42$$

4 Problema: lanci di un dato crescenti

Problema: Determinare la probabilità che, in 4 lanci successivi di un dado, i risultati compaiano in ordine strettamente crescente.

Per iniziare, come al solito, si definiscono lo spazio campionario Ω e l'evento A:

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \mid \omega_i \in \{1, \dots, 6\}\} \\
A &= \text{“i 4 lanci danno risultati in ordine strettamente crescente”} \\
&= \{(1,2,3,4),\ (1,2,3,5),\ (2,3,4,5),\ \dots\} \\
&= \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \mid \omega_i \in \{1, \dots, 6\},\ \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4\}
\end{aligned}$$

La cardinalità di Ω è data dalle disposizioni con ripetizione:

$$\#\,\Omega = 6^4$$

Invece, per calcolare la cardinalità di A, si osserva che, siccome l'ordine degli elementi di ciascuna n-upla è fissato (strettamente crescente), l'unico aspetto che varia è quali siano gli elementi scelti. In altre parole, le n-uple appartenenti ad A possono essere considerate rappresentative degli insiemi contenenti gli stessi 4 elementi, ovvero si ha la seguente corrispondenza biunivoca:

$$\forall a \in A \quad a \leftrightarrow L \subset \{1, \dots, 6\},\ \#\,L = 4$$

Di conseguenza, la cardinalità di A si ottiene usando le combinazioni:

$$\#\,A = C_{6,4} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{2!\,4!}$$

Allora, la probabilità che i 4 lanci diano risultati in ordine strettamente crescente è:

$$P(A) = \frac{\#\,A}{\#\,\Omega} = \frac{\frac{6!}{2!\,4!}}{6^4} = \frac{6!}{6^4 \cdot 2!\,4!} = \frac{5!}{6^3 \cdot 2!\,4!} = \frac{5}{6^3 \cdot 2} \approx 0.01$$

5 Problema: palline colorate

Problema: Da un'urna contenente 30 palline, delle quali 18 sono nere e 12 sono rosse, ne vengono estratte a caso 10. Determinare la probabilità che esattamente 7 delle palline estratte siano nere.

Lo spazio campionario, che qui rappresenta le possibili estrazioni, è formato da tutti gli insiemi di 10 palline, scelte tra le 30 palline $P_1, \ldots, P_{30}$, o, più nel dettaglio, tra le 18 palline rosse $R_1, \ldots, R_{18}$ e le 12 palline nere $N_1, \ldots, N_{12}$:

$$\begin{aligned}\Omega &= \{E \mid E \subset \{P_1, \ldots, P_{30}\},\ \#\, E = 10\} \\ &= \{E \mid E \subset \{R_1, \ldots, R_{18}, N_1, \ldots, N_{12}\},\ \#\, E = 10\}\end{aligned}$$

La sua cardinalità è quindi:

$$\#\,\Omega = C_{30,10} = \binom{30}{10}$$

Invece, l'evento considerato è costituito da tutti gli insiemi di 7 palline nere e 3 rosse:

$$\begin{aligned}A &= \text{“escono 7 palline nere”} \\ &= \{\{N_1, N_2, \ldots, N_7, R_1, R_2, R_3\}, \\ &\qquad \{N_2, N_3, \ldots, N_8, R_1, R_2, R_3\}, \\ &\qquad \{N_1, N_2, \ldots, N_7, R_2, R_3, R_4\}, \\ &\qquad \ldots\}\end{aligned}$$

Ogni elemento di A può essere messo in corrispondenza biunivoca con una n-upla rappresentativa, composta da un insieme E_N di 7 palline nere e un insieme E_R di 3 palline rosse:

$$\begin{aligned}\forall a \in A \quad a &\leftrightarrow (E_N, E_R) \\ & E_N \subset \{N_1, \ldots, N_{18}\},\ \#\, E_N = 7 \\ & E_R \subset \{R_1, \ldots, R_{12}\},\ \#\, E_R = 3\end{aligned}$$

Allora, siccome ci sono

$$C_{18,7} = \binom{18}{7}$$

modi di costruire l'insieme E_N, e

$$C_{12,3} = \binom{12}{3}$$

modi di costruire E_R, la cardinalità di A è:

$$\#\, A = \binom{18}{7}\binom{12}{3}$$

Di conseguenza, la probabilità di estrarre 7 palline nere è:

$$P(A) = \frac{\binom{18}{7}\binom{12}{3}}{\binom{30}{10}} \approx 0.23$$

6 Problema: palline numerate

Problema: Si estraggono 8 palline da un'urna che ne contiene 20, numerate da 1 a 20. Determinare la probabilità che il numero più basso estratto sia 5.

Lo spazio campionario sono tutte le possibili estrazioni di 8 palline:

$$\Omega = \{E \mid E \subset \{1, \dots, 20\},\ \# E = 8\}$$
$$\# \Omega = C_{20,8} = \binom{20}{8} = \frac{20!}{12!\,8!}$$

Invece, l'evento comprende tutte le estrazioni in cui si ottengono il numero 5 e altri 7 numeri maggiori di esso (ovvero compresi tra 6 e 20):

$$\begin{aligned} A &= \text{“il numero più basso estratto è 5”} \\ &= \{\{5, \omega_1, \dots, \omega_7\} \mid \omega_i \in \{6, \dots, 20\}\ \forall i,\ \omega_i \neq \omega_j\ \forall i \neq j\} \end{aligned}$$

Avendo fissato uno degli 8 numeri estratti, e imposto che gli altri siano maggiori di 5, ogni elemento di A può essere messo in corrispondenza con un sottoinsieme di 7 numeri scelti tra i $20 - 5 = 15$ dell'insieme $\{6, \dots, 20\}$, quindi:

$$\# A = C_{15,7} = \binom{15}{7} = \frac{15!}{8!\,7!}$$

La probabilità che il numero più basso estratto sia 5 è perciò:

$$P(A) = \frac{15!\,12!\,8!}{20!\,8!\,7!} = \frac{15!\,12!}{20!\,7!} = \frac{12 \cdot 11 \cdots 8}{20 \cdot 19 \cdots 16} \approx 0.051$$