

# Concetti di base

## 1 Immagine monocromatica

All'atto della sua formazione, un'immagine monocromatica è esprimibile mediante una funzione continua a due variabili indipendenti:

$$f(x, y), \quad f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

- $x$  e  $y$  sono le coordinate spaziali indipendenti del piano immagine;
- i valori  $f(x, y)$  esprimono le intensità della grandezza fisica misurata (solitamente la luce), e possono quindi essere interpretati come livelli di grigio.

## 2 Digitalizzazione

La **digitalizzazione** di un segnale continuo è un processo duplice di **discretizzazione**:

- nella dimensione spaziale: **campionamento**;
- nei livelli di grigio: **quantizzazione**.

## 3 Campionamento

L'operazione di **campionamento** (**sampling**) permette di passare da un segnale analogico, cioè una sequenza continua di valori, a una *sequenza di campioni uniformemente distribuiti nello spazio*.<sup>1</sup>

Tale processo può essere espresso come una partizione del piano  $XY$  dell'immagine in una griglia di celle, solitamente quadrate.

- Le coordinate del centro di ogni cella sono coppie ordinate  $(a, b)$ , con  $a$  e  $b$  interi.
- Il valore associato a ciascuna cella è frutto di un'integrazione dei valori continui presenti al suo interno, ed è quindi un'*approssimazione* di questi ultimi.

Matematicamente, il campionamento avviene tramite un'operazione di *convoluzione*.

---

<sup>1</sup>In alcune situazioni particolari, si effettua invece un campionamento disomogeneo, nel quale i campioni non sono uniformemente distribuiti.

### 3.1 Teorema del campionamento

In generale, il processo di campionamento introduce una perdita di informazione, che può portare a un deterioramento molto visibile oppure trascurabile. Un criterio di bontà per il processo di campionamento è fornito dal **teorema del campionamento** (o **teorema di Nyquist**).

*Teorema:* Un segnale limitato in banda può venire ricostruito senza errori da una serie di campionamenti effettuati a una frequenza maggiore o uguale del doppio della frequenza massima del segnale.

- Un segnale si dice *limitato in banda* se non ha componenti in frequenza superiori a una frequenza massima  $f_m$ .
- La *frequenza di campionamento* è l'inverso del *passo di campionamento*, cioè della distanza tra due punti (orizzontali e/o verticali) contigui della griglia di campionamento.
- La *frequenza del segnale immagine* è il numero di transizioni di valori di luminosità in un intervallo di spazio unitario. In pratica, le immagini con una prevalenza di frequenze basse hanno ampie aree con livelli di grigio relativamente uniformi, mentre le immagini con prevalenza di alte frequenze sono ricche di dettagli.
- La massima frequenza del segnale immagine si può individuare mediante un processo di analisi in frequenza di tale segnale.

### 3.2 Sottocampionamento e aliasing

In caso di **sottocampionamento**, cioè quando si esegue il campionamento con una frequenza troppo bassa, non rispettando le condizioni del teorema di Nyquist, si ha una perdita di informazioni chiamata **aliasing**: le alte frequenze presenti nel segnale immagine vengono trasformate in basse frequenze, alterando in modo irreversibile il segnale e, quindi, l'apparenza dell'immagine.

## 4 Quantizzazione

La **quantizzazione** (**quantisation**) è la conversione dalla gamma continua dei valori di intensità dell'immagine a un *insieme discreto e finito di valori di grigio*, solitamente interi. Tale insieme è chiamato **dinamica dei livelli di grigio** o **range dinamico** dell'immagine.

## 5 Rappresentazione dell'immagine digitale

A partire dall'immagine analogica  $I(x, y)$ , viene generata una matrice rettangolare di  $N \times M$  campioni equispaziati, detti **picture elements** (**pixel**):

$$\begin{bmatrix} I(0, 0) & I(0, 1) & \cdots & I(0, M - 1) \\ I(1, 0) & I(1, 1) & \cdots & I(1, M - 1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I(N - 1, 0) & I(N - 1, 1) & \cdots & I(N - 1, M - 1) \end{bmatrix}$$

Quando un'immagine digitale viene rappresentata sul piano, per convenzione:

- si pone l'origine  $(0, 0)$  in alto a sinistra;
- l'asse  $x$  si orienta verso il basso, quindi ciascun valore della coordinata  $x$  corrisponde a una riga dell'immagine;
- l'asse  $y$  si orienta verso destra, quindi ciascun valore della coordinata  $y$  identifica una colonna dell'immagine.

In questo modo, sul piano ciascun pixel si trova nella stessa posizione che occupa nella rappresentazione a matrice.

Il valore di ciascun pixel può essere interpretato come l'altezza di un punto di una superficie 3D costruita sopra al piano, oppure come un livello di grigio sul piano.

## 6 Occupazione di memoria e risoluzione

Il numero di bit necessari per memorizzare un'immagine digitale  $N \times M$  è

$$b = N \cdot M \cdot k$$

dove  $k$  è la **profondità del pixel**, cioè il numero di bit necessari a rappresentare i valori compresi nel range dinamico: con  $k$  bit per pixel possono essere rappresentati  $L = 2^k$  livelli di grigio (ad esempio, per il range dinamico 0–255, cioè per  $L = 256$ , si ha  $k = 8$ ).

Da  $N$ ,  $M$  e  $k$  dipende, oltre all'occupazione di memoria, anche la risoluzione dell'immagine:

- $N$  e  $M$  determinano la **risoluzione spaziale** (passo di campionamento);
- $k$  determina la **risoluzione radiometrica** (livelli di quantizzazione).

Di conseguenza, all'aumentare della risoluzione cresce anche l'occupazione di memoria, e perciò bisogna solitamente trovare un compromesso.

La scelta di  $N$ ,  $M$  e  $k$  dipende dal contesto di utilizzo: ad esempio, per un'immagine a scopo medico-diagnostico è necessaria un'alta risoluzione, mentre per un'immagine da visualizzare su un generico sito web si preferisce una risoluzione medio-bassa, poiché è più importante che le dimensioni del file siano contenute.

## 7 Risoluzione spaziale

*Definizione percettiva:* il più piccolo dettaglio distinguibile nell'immagine, oppure il numero di dettagli distinguibili per unità di lunghezza.

*Definizione quantitativa:* il numero di pixel (dots) per unità di lunghezza.

La *dimensione* di un'immagine, cioè il numero di righe e di colonne della matrice di pixel (ad esempio  $512 \times 512$ ), è data dal prodotto tra la *grandezza* dell'area di visualizzazione e la risoluzione spaziale (che è appunto il numero di pixel per unità di lunghezza):

$$\text{dimensione} = \text{grandezza} \cdot \text{risoluzione spaziale}$$

Il fattore principale che determina la risoluzione spaziale di un'immagine è il campionamento. All'aumento del passo di campionamento:

- se si vuole mantenere costante la risoluzione spaziale, si ottengono immagini di grandezza (e quindi dimensione) minore;
- se si vuole mantenere fissa la grandezza, diminuisce la risoluzione, e si ha quindi un effetto di sgranamento a scacchiera (perché ciascun pixel deve essere ripetuto più volte per riempire l'area di visualizzazione).

## 8 Risoluzione radiometrica

*Definizione percettiva:* la più piccola variazione di livelli di grigio distinguibile nell'immagine.

Quantitativamente, la risoluzione radiometrica (o gamma tonale, o intensity resolution) si misura in numero di bit per pixel (solitamente 8 bit, ma anche 16 bit, 24 bit ecc.). Il numero di livelli di grigio è una potenza intera di 2: con  $k$  bit si hanno  $2^k$  livelli.

Aumentando il passo di quantizzazione, cioè riducendo la risoluzione radiometrica, si ha l'effetto di introdurre dei falsi contorni, perché quelle che in realtà sarebbero sfumature graduali vengono quantizzate come salti improvvisi ed eccessivi di livelli.

## 9 Qualità dell'immagine

I fattori oggettivi che concorrono alla qualità dell'immagine sono la risoluzione spaziale e la risoluzione radiometrica. Nel giudizio della qualità, bisogna però tenere conto anche:

- delle nostre capacità percettive;
- dei vincoli imposti dal tipo di applicazione.

A livello percettivo, ad esempio, è stato dimostrato sperimentalmente che per le immagini ricche di dettagli, ma anche, in generale, all'aumentare della risoluzione spaziale, sono sufficienti un numero minore di livelli di grigio.

Determinare per quali valori di  $N$ ,  $M$  e  $k$  si ha una buona qualità dell'immagine è quindi una questione complessa (di cui si occupa la disciplina dell'Image Quality, che cerca di definire delle misure quantitative per la qualità).