Azzolini Riccardo 2018-10-05

Relazioni di equivalenza

1 Relazione transitiva

Una relazione binaria R su A è **transitiva** se per ogni $x, y, z \in A$, se xRy e yRz allora xRz.

$$\forall x, y, z \in A, \quad xRy \text{ AND } yRz \implies xRz$$

Non è transitiva se esistono $x, y, z \in A$ tali che xRy e yRz ma $x \not{R} z$.

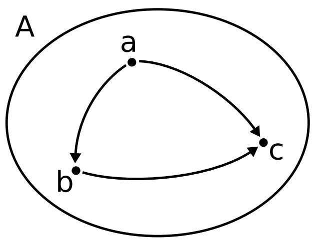
1.1 Nel diagramma di Venn

Se tra due elementi esiste un percorso fatto da due frecce ce ne deve essere anche uno fatto da una freccia sola.

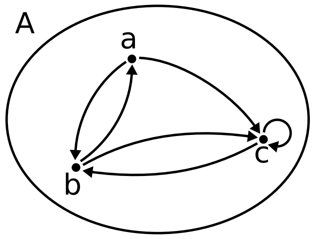
1.2 Esempio

$$A = \{a, b, c\}$$

$$R = \{(a, b), (b, c), (a, c)\} \text{ è transitiva}$$



$$S = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, b), (c, c)\} \text{ non è transitiva}$$



Controesempi:

- cSb, bSa ma $c \not S a$
- bSa, aSb ma $b \not S b$

2 Relazione di equivalenza

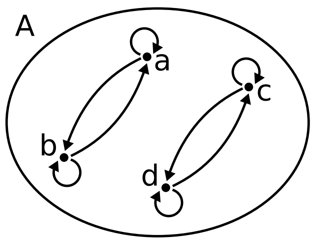
Una relazione binaria R su A è una **relazione di equivalenza** se è *riflessiva*, *simmetrica* e *transitiva*.

Se R è una relazione di equivalenza su A e aRb, si dice che a è **equivalente** a b.

2.1 Esempio su insieme finito

$$A = \{a, b, c, d\}$$

$$R = \{(a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\} \cup \{(x, x) \mid x \in A\}$$



La relazione R è

- *riflessiva* per definizione: $\{(x, x) \mid x \in A\} \subseteq R$
- *simmetrica* perché

- aRb e bRa
- cRd e dRc

- *transitiva* perché
  - aRb, bRa e aRa
  - bRa, aRb e bRb
  - aRa, aRb e aRb
  - bRb, bRa e bRa
  - cRd, dRc e cRc
  - ecc.

quindi è una *relazione di equivalenza.*

2.2 Esempio su insieme infinito

$$R = \{(n, m) \mid n, m \in \mathbb{Z}, n - m \text{ è multiplo di } 4\}$$

Nota: un numero $x \in \mathbb{Z}$ è multiplo di 4 se esiste un $k \in \mathbb{Z}$ tale che $x = 4k$.

- *riflessiva* perché per ogni $n \in \mathbb{Z}$, $n - n = 0$ è multiplo di 4
- *simmetrica* perché per ogni $n, m \in \mathbb{Z}$, se $n - m = 4a$ (è multiplo di 4) allora $m - n = -(n - m) = 4(-a)$ (è anch'esso multiplo di 4).
- *transitiva* perché per ogni $n, m, h \in \mathbb{Z}$, se $n - m = 4a$ e $m - h = 4b$ allora $n - h = n - m + m - h = 4a + 4b = 4(a + b)$

R è quindi una relazione di equivalenza.

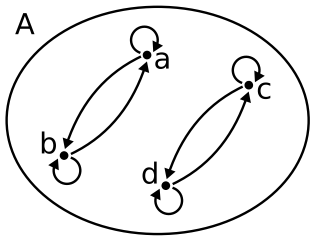
3 Classe di equivalenza

Se R è una relazione di equivalenza su A, la **classe di equivalenza** di $x \in A$ *modulo* R è l'insieme di elementi di A che sono in relazione con x.

$$[x]_R = \{y \in A \mid xRy\}$$
$$[x]_R \subseteq A$$

3.1 Esempio

$$A = \{a, b, c, d\}$$
$$R = \{(a, b), (b, a), (c, d), (d, c)\} \cup \{(x, x) \mid x \in A\}$$



$$[a]_R = \{a, b\} = [b]_R$$
$$[c]_R = \{c, d\} = [d]_R$$

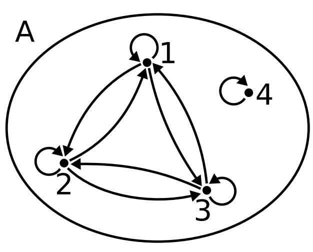
4 Insieme quoziente

Data una relazione di equivalenza R su A, l'**insieme quoziente** di A modulo R è l'insieme di tutte le classi di equivalenza modulo R di A.

$$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$$

4.1 Esempio

$$X = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (2, 1), (3, 1), (3, 2)\} \cup \{(x, x) \mid x \in 1\}$$



$$[1]_R = [2]_R = [3]_R = \{1, 2, 3\}$$
$$[4]_R = \{4\}$$

$$X/R = \{[1]_R, [4]_R\}$$

5 Esempio completo

$$A = \{a, b, c\}$$
$$R = \{(u, b) \mid u, v \in A^+, \#u = \#v\}$$

R è una relazione di equivalenza:

- *riflessiva* perché per ogni $u \in A^+$, $\#u = \#u$
- *simmetrica* perché per ogni $u, v \in A^+$, se $\#u = \#v$ allora $\#v = \#u$
- *transitiva* perché per ogni $u, v, w \in A^+$, se $\#u = \#v$ e $\#v = \#w$ allora $\#u = \#w$

Classi di equivalenza:

- parole di lunghezza 1: $[a]_R = [b]_R = [c]_R = \{a, b, c\} = \{u \in A^+ \mid \#u = 1\}$
- parole di lunghezza 2: $[aa]_R = [ab]_R = ... = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\} = \{u \in A^+ \mid \#u = 2\}$
- parole di lunghezza 3: $[aaa]_R = [abc]_R = ... = \{u \in A^+ \mid \#u = 3\}$
- ecc.

$$A^+/R = \{a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc, aaa, aab, aac, ..., abab, abca, abcb, ...\}$$