Azzolini Riccardo 2018-12-04

Omomorfismi e applicazioni lineari

1 Omomorfismo

Se $(A, \circ)$ e $(B, *)$ sono due strutture algebriche qualsiasi, una funzione $f : A \to B$ si chiama **omomorfismo** se, per ogni $a_1, a_2 \in A$:

$$f(a_1 \circ a_2) = f(a_1) * f(a_2)$$

1.1 Esempi

- $f : n \in (\mathbb{N}, +) \mapsto [n]_4 \in (\mathbb{Z}_4, +)$ è un omomorfismo:

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad f(n + m) = [n + m]_4 = [n]_4 + [m]_4 = f(n) + f(m)$$

- $f : n \in (\mathbb{N}, +) \mapsto 2^n \in (\mathbb{N}, +)$ *non* è un omomorfismo:

$$f(n + m) = 2^{n+m} \qquad f(n) + f(m) = 2^n + 2^m$$
$$2^{n+m} \neq 2^n + 2^m$$

  $g : n \in (\mathbb{N}, +) \mapsto 2^n \in (\mathbb{N}, \cdot)$ è invece un omomorfismo:

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad g(n + m) = 2^{n+m} = 2^n \cdot 2^m = g(n) \cdot g(m)$$

2 Applicazione lineare

Una funzione $f : U \to V$ tra due spazi vettoriali U e V è un'**applicazione lineare** se

- è un omomorfismo di $(U, +)$ in $(V, +)$
- $f(r \cdot u) = r \cdot f(u)$ per ogni $r \in \mathbb{R}$ e $u \in U$

In altre parole, un'applicazione lineare *preserva le combinazioni lineari*:

$$\forall r, s \in \mathbb{R},\ u, v \in U, \quad f(r \cdot u + s \cdot v) = r \cdot f(u) + s \cdot f(v)$$

2.1 Esempio

$$U = V = \mathbb{R}^2$$
$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + y, 0) \in \mathbb{R}^2$$

$$u_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2 \qquad u_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned}
f(u_1 + u_2) &= f((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \\
&= f(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\
&= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2, 0) \\
&= ((x_1 + y_1) + (x_2 + y_2), 0) \\
&= (x_1, y_1, 0) + (x_2 + y_2, 0) \\
&= f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) \\
&= f(u_1) + f(u_2)
\end{aligned}$$

$$r \in \mathbb{R} \qquad u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned}
f(r \cdot u) &= f(r \cdot (x, y)) \\
&= f(rx, ry) \\
&= (rx + ry, 0) \\
&= (r(x + y), 0) \\
&= r \cdot (x + y, 0) \\
&= r \cdot f(x, y) \\
&= r \cdot f(u)
\end{aligned}$$

Quindi f è un'applicazione lineare.

2.2 Controesempio

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + 1, y + 1) \in \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned}f((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) &= f(x_1+x_2,y_1+y_2)\\ &= (x_1+x_2+1,y_1+y_2+1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2) &= (x_1+1,y_1+y)+(x_2+1,y_2+1)\\ &= (x_1+x_2+2,y_1+y_2+2)\end{aligned}$$

$$f((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) \neq f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2)$$

Quindi f *non* è un'applicazione lineare.

3 Immagine e nucleo

Se $f : U \to V$ è un'applicazione lineare,

- l'**immagine** di f è l'insieme:

  $$\operatorname{Im} f = \{v \in V \mid \exists u \in U,\ \ v = f(u)\} \subseteq V$$

  che è un sottospazio di V
- il **nucleo** (o *kernel*) di f è l'insieme:

  $$\operatorname{Ker} f = \{u \in U \mid f(u) = 0_V\} \subseteq U$$

  che è un sottospazio di U

Vale inoltre la proprietà:

$$\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim U$$

3.1 Esempio

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + y, 0) \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} f &= \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \exists u \in \mathbb{R}^2,\ \ v = f(u)\} \\
&= \{(x_v, y_v) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists (x_u, y_u) \in \mathbb{R}^2,\ \ (x_v, y_v) = f(x_u, y_u)\} \\
&= \{(x_v, y_v) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists (x_u, y_u) \in \mathbb{R}^2,\ \ (x_v, y_v) = (x_u + y_u, 0)\} \\
&= \{(x_v, y_v) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists (x_u, y_u) \in \mathbb{R}^2,\ \ x_v = x_u + y_u,\ \ y_v = 0\} \\
&= \{(x_v, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x_v \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

$\operatorname{Im} f$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$:

- $\dim \operatorname{Im} f = 1$
- una base è $\{(1, 0)\}$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} f &= \{u \in \mathbb{R}^2 \mid f(u) = (0, 0)\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + y, 0) = (0, 0)\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\} \\
&= \{(x, -x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

$\operatorname{Ker} f$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$:

- $\dim \operatorname{Ker} f = 1$
- una base è $\{(1, -1)\}$