Azzolini Riccardo 2019-02-20

Potenze e radici

1 Definizione iniziale di potenza

Una potenza con *base* $a \in \mathbb{R}$ ed *esponente* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ è definita come

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ volte}}$$

1.1 Proprietà

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad \forall a \in \mathbb{R}, \;\; n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
2. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad \forall a \in \mathbb{R}, \;\; n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \;\; n > m$
3. $(a^n)^m = a^{n \cdot m} \quad \forall a \in \mathbb{R}, \;\; n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
4. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \;\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
5. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \;\; n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \;\; b \neq 0$

2 Esponente 0

Per estendere la definizione al caso $n = 0$ in modo coerente con le proprietà delle potenze, si stabilisce che $a^0 = 1$:

$$1 = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$$

per la proprietà 2.

3 Esponente negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \neq 0, \, n \in \mathbb{N}$$

per definizione, in modo da rispettare le proprietà esistenti. Ad esempio:

$$7^{-2} = \frac{7^5}{7^7} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{1}{7^2}$$

per la proprietà 2.

4 Radici

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a > 0$ e $b > 0$. b è la **radice** n-esima di a, e si scrive $b = \sqrt[n]{a}$, se $b^n = a$.

4.1 Proprietà

$\forall a, b \in \mathbb{R}, \;\; a > 0, \;\; b > 0$:

- $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
- $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

Osservazione: $\sqrt[n]{a + b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$

5 Esponente razionale

Sia $a \in \mathbb{R}$, con $a > 0$.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

per definizione. Se n è dispari, è ammesso anche $a < 0$.

Osservazione: Siano $r, s \in \mathbb{Q}$, con $0 < r < s$.

- Se $a > 1$, allora $a^r < a^s$.
- Se $0 < a < 1$, allora $a^r > a^s$.

6 Esponente reale positivo con base maggiore di 1

Siano $a > 1$ e $r \in \mathbb{R}^+$. r è rappresentato dalla sequenza infinita di cifre

$$r = p.\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n \dots$$

Per definizione:

$$a^r = \sup\{a^{p.\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}\}$$

dove $p.\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$ è un'approssimazione razionale di r. Siccome $a^{p.\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} < a^{p+1}$, l'insieme $\{a^{p.\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}\}$ è limitato superiormente, e allora, per la completezza dei reali, ha un estremo superiore, che è appunto (per definizione) a^r.

7 Esponente reale positivo con base minore di 1

Siano $0 < a < 1$ e $r \in \mathbb{R}^+$.

$$a^r = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^r}$$

per definizione.

8 Esponente reale negativo

Siano $a \in \mathbb{R}^+$ e $r \in \mathbb{R}^-$.

$$a^r = \frac{1}{a^{-r}}$$

per definizione.

9 Basi 1 e 0

- Se $a = 1$, $a^r = 1^r = 1$.
- Se $a = 0$ e $r > 0$, $a^r = 0^r = 0$.