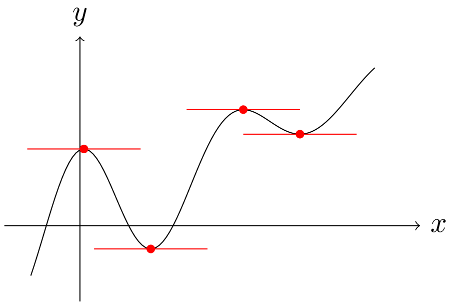
Azzolini Riccardo 2019-04-09

Teoremi sulle funzioni derivabili

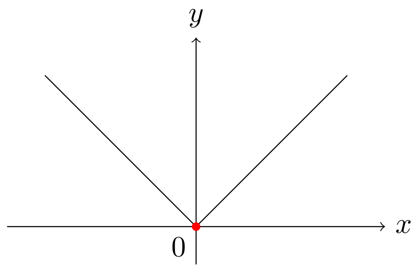
1 Teorema di Fermat

Teorema: Sia $f : X \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto interno a X. Se f è derivabile in x_0, e ha in x_0 un estremo locale (cioè x_0 è un punto di minimo/massimo locale), allora $f'(x_0) = 0$.

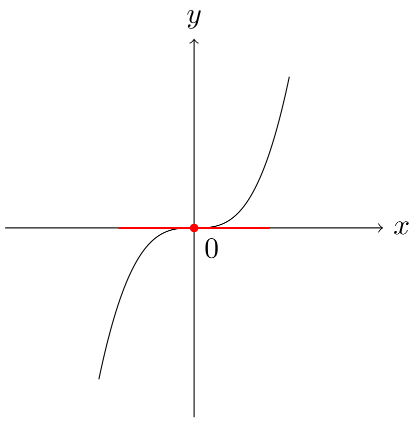


Osservazioni:

- Un estremo locale può esistere anche in un x_0 nel quale la funzione non è derivabile, oppure in un punto x_0 di frontiera per X (quindi non interno). Ad esempio, $f(x) = |x|$ ha un minimo locale (e anche assoluto) in $x_0 = 0$, e $\nexists f'(0)$.



- Il viceversa del teorema non vale in generale, cioè $f'(x_0) = 0$ non è una condizione sufficiente per l'esistenza di un estremo locale in x_0. Ad esempio, per $f(x) = x^3$, $f'(0) = 0$, ma $x_0 = 0$ non è un punto di minimo/massimo locale.



Dimostrazione: Si suppone che f abbia in x_0 un massimo locale (la dimostrazione è analoga nel caso di un minimo locale). Allora, $\exists U(x_0)$ tale che

$$f(x) \leq f(x_0) \implies f(x) - f(x_0) \leq 0 \quad \forall x \in U(x_0) \cap X$$

Si studia quindi il segno del rapporto incrementale nell'intorno $U(x_0)$:

$$x - x_0 \begin{cases} > 0 & \text{se } x > x_0 \\ < 0 & \text{se } x < x_0 \end{cases} \implies \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leq 0 & \text{se } x > x_0 \\ \geq 0 & \text{se } x < x_0 \end{cases} \quad \forall x \in U(x_0) \cap X$$

Di conseguenza:

$$\begin{aligned} f'_+(x_0) &= \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \\ f'_-(x_0) &= \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \end{aligned}$$

Siccome, per ipotesi, f è derivabile in x_0, si ha $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$, e perciò

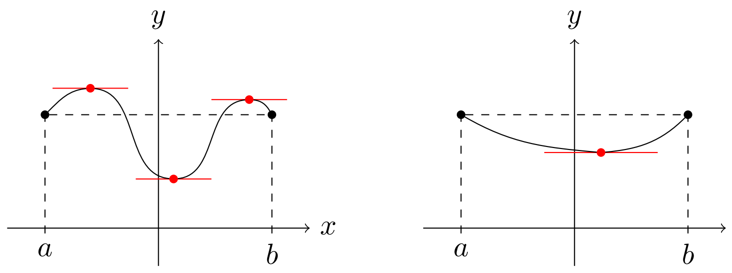
$$\left.\begin{aligned} f'(x_0) \leq 0 \\ f'(x_0) \geq 0 \end{aligned}\right\} \implies f'(x_0) = 0 \qquad \square$$

2 Punto stazionario

Sia f derivabile in x_0. Se $f'(x_0) = 0$, x_0 si dice **punto stazionario** (o **punto critico**).

3 Teorema di Rolle

Teorema: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ un funzione continua in $[a,b]$ (cioè anche in a e b, eventualmente solo da destra/sinistra) e derivabile in (a,b). Se $f(a) = f(b)$, allora esiste almeno un punto $c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = 0$.



Dimostrazione: Per ipotesi, f è continua in $[a,b]$. Allora, per Weierstrass, $\exists x_1, x_2 \in [a,b]$ tali che

$$f(x_1) = \min_{[a,b]} f(x) \qquad f(x_2) = \max_{[a,b]} f(x)$$

Ci sono due possibili casi:

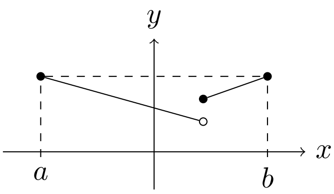
- Nel primo caso, $x_1 = a$ e $x_2 = b$, o viceversa. Siccome, per ipotesi, $f(a) = f(b)$, si ha

  $$\min_{[a,b]} f(x) = \max_{[a,b]} f(x)$$

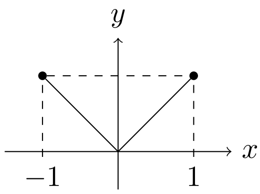
  quindi f è una funzione costante, $f(x) = k \quad \forall x \in [a,b]$, e perciò ha derivata $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$.
- Nel secondo caso, invece, almeno uno tra x_1 e x_2 è un punto interno ad $[a,b]$. Si suppone, ad esempio, che sia interno $x_1 \in (a,b)$. x_1, essendo il punto di minimo assoluto in $[a,b]$, è anche un punto di minimo locale, da cui segue, per il teorema di Fermat, che $f'(x_1) = 0$. $\square$

3.1 Necessità delle ipotesi

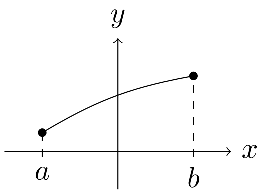
- Se f non è continua:



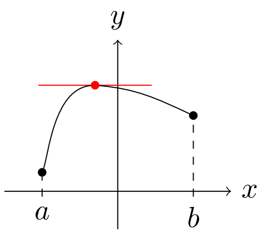
- Se f non è derivabile:



- Se f è continua e derivabile, ma $f(a) \neq f(b)$:



Il teorema è comunque una condizione sufficiente, ma non necessaria, all'esistenza di un punto stazionario. Ad esempio, questa funzione ha un punto stazionario in (a, b), nonostante $f(a) \neq f(b)$:

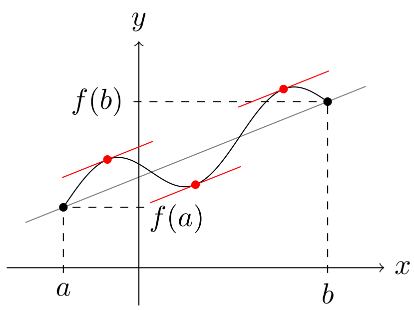


4 Teorema di Lagrange

Teorema: Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Allora, esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

In pratica, ciò significa che almeno un punto del grafico di $y = f(x)$ in (a, b) ha tangente parallela alla retta che congiunge i punti agli estremi dell'intervallo, cioè $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.



Dimostrazione: Si costruisce una funzione ausiliaria $h(x)$ per poter applicare il teorema di Rolle:

$$h(x) = f(x) - \underbrace{\left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right)}_{g(x)}$$

dove $g(x)$ è la retta passante per gli estremi.

- $h(x)$ è continua in $[a, b]$, dato che f lo è per ipotesi e g lo è perché è un retta.
- $h(x)$ è derivabile in (a, b), dato che f lo è per ipotesi e g lo è perché è un retta.

A entrambi gli estremi, $h(x)$ vale 0,

$$
\begin{aligned}
h(a) &= f(a) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) \right) \\
&= f(a) - f(a) - 0 = 0 \\
h(b) &= f(b) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) \right) \\
&= f(b) - f(a) - f(b) + f(a) = 0
\end{aligned}
$$

quindi $h(a) = h(b)$. Allora, per Rolle, $\exists c \in (a,b)$ tale che $h'(c) = 0$, e di conseguenza

$$
\begin{aligned}
h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} &= 0 \\
f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} & \qquad \square
\end{aligned}
$$

5 Legame tra segno della derivata e monotonia

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ (dove I è un intervallo qualsiasi) una funzione derivabile in I. Allora, come conseguenza del teorema di Lagrange:

1. se $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$, f è crescente in I;
2. se $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$, f è decrescente in I;
3. se $f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$, f è costante in I.

Inoltre, nei casi 1 e 2, se la disuguaglianza è stretta ($f'(x) > 0$ o $f'(x) < 0$), allora f è strettamente crescente/decrescente in I.

Osservazioni:

- Vale anche il viceversa:[1]
  - se f è crescente in I, $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$;
  - se f è decrescente in I, $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$;
  - se f è costante in I, $f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$.

[1] La dimostrazione del viceversa consiste semplicemente nello studio del segno del rapporto incrementale.

Non si ha però la disuguaglianza stretta, dato che una funzione strettamente crescente/decrescente può comunque avere punti con derivata 0. Ad esempio, $f(x) = x^3$ è strettamente crescente nel dominio $\mathbb{R}$, ma

$$f'(x) = 3x^2 \geq 0, \quad f'(0) = 0$$

- È fondamentale che il dominio sia un intervallo. Ad esempio, $f(x) = \frac{1}{x}$, il cui dominio è $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, ha derivata

  $$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \forall x \in X$$

  ma *non* è decrescente in D (un controesempio è $-1 < 1,\ f(-1) = -1 < f(1) = 1$). Bisogna invece specificare che f è decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, +\infty)$, ma non complessivamente.

Dimostrazione:

1. Per ipotesi, $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$. Siano $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$. Applicando Lagrange a f nell'intervallo $[x_1, x_2]$, si ricava che $\exists c \in (x_1, x_2)$ tale che

   $$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

   e quindi

   $$f'(c)(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1)$$

   $$\left.\begin{array}{l} f'(c) \geq 0 \\ x_2 - x_1 > 0 \end{array}\right\} \implies f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0 \implies f(x_2) - f(x_1) \geq 0$$

   ovvero $f(x_2) \geq f(x_1) \quad \forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2$, cioè f è crescente in I.

   Partendo invece dall'ipotesi $f'(c) > 0 \quad \forall x \in I$, si dimostra allo stesso modo che f è strettamente crescente in I.

2. La dimostrazione è analoga a quella del caso 1.

3. $f'(x) = 0 \iff f'(x) \geq 0 \wedge f'(x) \leq 0$, quindi f è sia crescente che decrescente, cioè costante, in I. $\square$