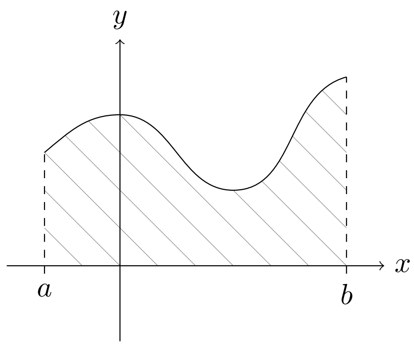
Azzolini Riccardo 2019-04-29

Integrazione

1 Somme inferiori e superiori

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$. Si vuole calcolare l'area del sottografico di f su $[a, b]$.



Si suddivide l'intervallo $[a, b]$ in n intervallini $[x_{i-1}, x_i]$, con $i = 1, \dots, n$, tali che

$$\bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_1] = [a, b]$$

Questi intervallini costituiscono una **suddivisione** dell'intervallo $[a, b]$, che si indica con $\mathcal{D}$.

Sia

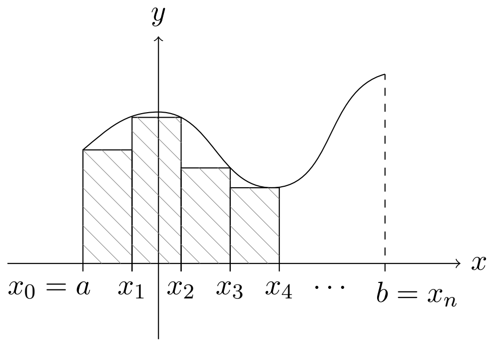
$$m_i = \min_{x \in [x_{i-1}, x_1]} f(x)$$

(che esiste per Weierstrass). La somma delle aree dei rettangoli di

- base pari all'ampiezza di $[x_{i-1}, x_i]$, cioè $x_i - x_{i-1}$
- altezza m_i

è detta **somma inferiore** di f relativa alla suddivisione $\mathcal{D}$ dell'intervallo $[a, b]$ e si indica con

$$s(\mathcal{D}, f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, m_i$$



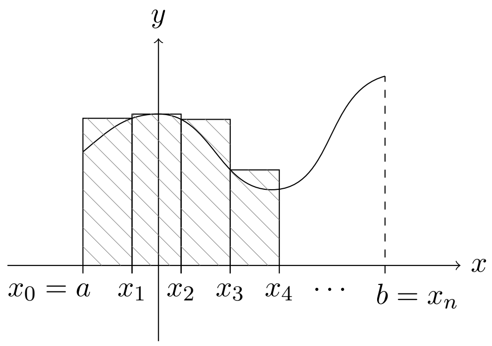
Il valore $s(\mathcal{D}, f)$ è sempre minore o uguale all'area del sottografico, cioè l'approssima per difetto.

Considerando invece i rettangoli di altezza

$$M_i = \max_{x \in [x_{i-1}, x_1]} f(x)$$

si ottiene una **somma superiore**,

$$S(\mathcal{D}, f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, M_i$$

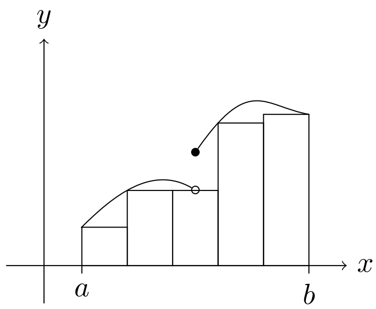


che approssimano per eccesso l'area del sottografico.

Se A è l'area del sottografico, si ha quindi che $s(\mathcal{D}, f) \leq A \leq S(\mathcal{D}, f)$ $\forall \mathcal{D}$ suddivisione di $[a, b]$.

Osservazione: Se f non è continua, ma è limitata in $[a, b]$, si possono costruire comunque le somme inferiori e superiori, prendendo

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_1]} f(x)$$
$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_1]} f(x)$$



2 Integrale

Quando le suddivisioni diventano più *fini*, le somme inferiori inferiori crescono e quelle superiori decrescono (perché, intuitivamente, approssimano meglio l'area del sottografico). Se il valore massimo possibile delle somme inferiori e il minimo delle somme superiori coincidono, sono uguali all'area del sottografico.

Definizione: Se f è limitata in $[a, b]$, e se

$$\sup_{\substack{\mathcal{D} \text{ suddivisione} \\ \text{di } [a,b]}} s(\mathcal{D}, f) = \inf_{\substack{\mathcal{D} \text{ suddivisione} \\ \text{di } [a,b]}} S(\mathcal{D}, f)$$

allora f si dice **integrabile** (**secondo Riemann**), e

$$\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) = \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f) = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$$

è l'**integrale** (**di Riemann**) di f su $[a, b]$.

- f si dice **funzione integranda**.

- $[a, b]$ è l'**intervallo di integrazione**.
- Il simbolo $\int$ è una “S” allungata, che richiama le somme a partire dalle quali si definisce l'integrale.
- Il simbolo $\mathrm{d}x$ si può interpretare come l'ampiezza infinitesima degli intervallini in cui si suddivide $[a, b]$; essendo molto piccoli, in ciascuno di essi $\sup f$ e $\inf f$ coincidono, quindi l'altezza dei rettangoli è semplicemente $f(x)$.
- La variabile x è una *variabile muta* (così come l'indice di una sommatoria è muto, perché “sparisce” se si scrive la sommatoria per esteso), quindi può avere qualsiasi nome.

Osservazione: Non tutte le funzioni limitate sono integrabili. Ad esempio, in un qualsiasi intervallo $[a, b]$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

è limitata, ma, siccome ogni intervallino contiene sia numeri razionali che irrazionali (per la densità di $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$), si ha che

$$\begin{aligned} s(\mathcal{D}, f) &= 0 && \implies \sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}, f) = 0 \\ S(\mathcal{D}, f) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot 1 = b - a && \implies \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}, f) = b - a \neq 0 \end{aligned}$$

quindi f non è integrabile.

3 Integrale di una funzione negativa

Se $f(x) \le 0 \quad \forall x \in [a, b]$, allora $-f(x) \ge 0 \quad \forall x \in [a, b]$, quindi l'area del sottografico di f su $[a, b]$ è

$$\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x$$

e, per definizione:

$$\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

4 Integrale di una funzione di segno variabile

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata (qualsiasi). Allora, si definisce

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \underbrace{f_+(x)}_{\geq 0}\,\mathrm{d}x - \int_a^b \underbrace{f_-(x)}_{\geq 0}\,\mathrm{d}x$$

5 Integrale con $b \leq a$

Se $b < a$ (cioè $[a, b]$ non è un intervallo, ma lo è invece $[b, a]$), si definisce

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Se invece $b = a$, si pone

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

6 Proprietà dell'integrale

Siano f e g due funzioni integrabili su $[a, b]$.

1. $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ (indipendentemente dall'ordine in cui sono disposti a, b, c), vale

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

2. Se $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$, allora

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

3. Più in generale, se $f(x) \leq g(x)$,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

   che equivale alla 2 se $[a, b]$ è un intervallo, cioè se $a < b$, ma vale anche se $b < a$:

- se $a < b$,

$$\underbrace{\frac{1}{b-a}}_{>0}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \underbrace{\frac{1}{b-a}}_{>0}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

- se $b < a$,

$$\underbrace{\frac{1}{b-a}}_{<0}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \underbrace{\frac{1}{b-a}}_{<0}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \ge \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

4. **Linearità**: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

5. Se f è integrabile, allora $|f|$ è integrabile, e si ha

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

che è una generalizzazione della disuguaglianza triangolare.

7 Teorema della media integrale

Teorema: Sia f integrabile in $[a, b]$, e siano

$$m = \inf_{[a,b]} f(x) \qquad M = \sup_{[a,b]} f(x)$$

Allora,

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a)$$

Se, inoltre, f è continua in $[a, b]$, $\exists c \in [a, b]$ tale che

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$$

Dimostrazione:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a)$$

è ovvia per la costruzione dell'integrale:

- $m(b-a)$ è una somma inferiore (quella relativa alla suddivisione "estrema", che non suddivide l'intervallo);
- analogamente, $M(b-a)$ è una somma superiore.

Se f è continua in $[a, b]$, allora

$$\begin{gathered}
m\underbrace{(b-a)}_{>0} \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M\underbrace{(b-a)}_{>0} \\
m \le \underbrace{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{=r\in\mathbb{R}} \le M \\
m = \min_{[a,b]} f(x) \le r \le M = \max_{[a,b]} f(x)
\end{gathered}$$

dato che

$$m = \inf_{[a,b]} f(x) = \min_{[a,b]} f(x) \qquad M = \sup_{[a,b]} f(x) = \max_{[a,b]} f(x)$$

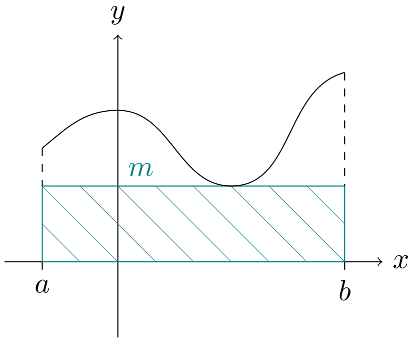
per Weierstrass. Si può quindi applicare il teorema dei valori intermedi: $\exists c \in [a, b]$ tale che

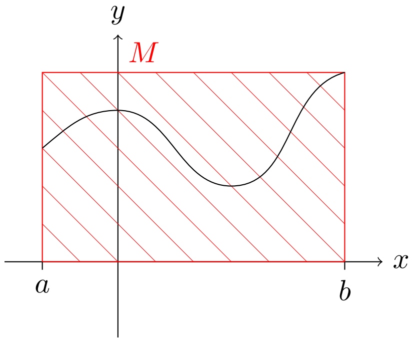
$$\begin{aligned}
f(c) &= r \\
f(c) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\
f(c)(b-a) &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \square
\end{aligned}$$

7.1 Interpretazione geometrica

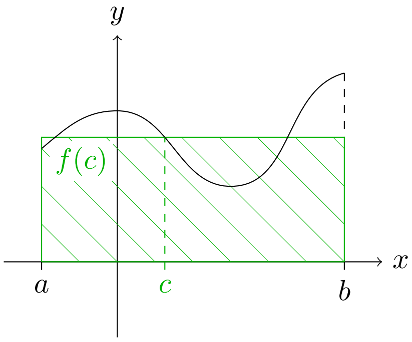
Se f è continua e positiva in $[a, b]$:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a)$$

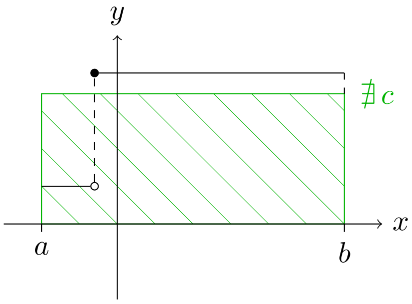




$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$$



Se invece f non è continua, può non esistere c:



8 Classi di funzioni integrabili

- *Teorema*: Se f è continua in $[a, b]$, allora è integrabile in $[a, b]$.
- *Teorema*: Se f è monotona in $[a, b]$, allora è integrabile in $[a, b]$.
- *Teorema*: Se f è limitata in $[a, b]$ e ha un numero finito di punti di discontinuità in $[a, b]$, allora è integrabile in $[a, b]$.