Azzolini Riccardo 2020-10-07

DFA — Definizione alternativa di computazione

1 Computazione di un DFA su una stringa

Dato un DFA $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$, in cui $\delta : Q \times \Sigma \to Q$, si definisce la **funzione di transizione estesa** $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$ di A, per induzione sulla lunghezza della stringa in input $w \in \Sigma^*$:

- *Base*: quando $|w| = 0$, cioè $w = \epsilon$, si definisce
$$\hat{\delta}(q, \epsilon) = q$$
(informalmente, se non ci sono input, l'automa non si muove dallo stato corrente).
- *Passo induttivo*: quando $|w| > 0$, la stringa w contiene almeno un carattere, quindi può essere "spezzata" in $w = xa$, dove:
  - $x \in \Sigma^*$ è un prefisso che comprende tutti i simboli tranne l'ultimo;
  - $a \in \Sigma$ è un postfisso che coincide con l'ultimo simbolo.

  Allora, si definisce:
$$\hat{\delta}(q, xa) = \delta(\hat{\delta}(q, x), a)$$
  Come caso particolare, se $|w| = 1$ si ha $w = a = \epsilon a$, cioè $x = \epsilon$, da cui segue che:
$$\hat{\delta}(q, a) = \delta(\hat{\delta}(q, \epsilon), a) = \delta(q, a)$$

In pratica, la funzione di transizione estesa descrive l'evoluzione, la computazione dell'automa A sulla stringa w nel senso che $\hat{\delta}(q, w)$ è lo stato in cui l'automa evolve partendo dallo stato q e leggendo l'intera stringa w.

Osservazione: A differenza della funzione di transizione δ, quella estesa $\hat{\delta}$ ha un dominio $Q \times \Sigma^*$ che è infinito (perché Σ^* è infinito), quindi non può essere descritta da una tabella. Questo non è però un problema, perché la definizione induttiva appena presentata dà una procedura operativa che permette di calcolare il valore di $\hat{\delta}(q, w)$ per qualunque coppia $(q, w) \in Q \times \Sigma^*$ (ed è anche facile scrivere un programma che implementi concretamente tale procedura).

2 Stringhe e linguaggi accettati

Sia $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ un DFA.

- A **accetta** una stringa $w \in \Sigma^*$ se e solo se $\hat{\delta}(q_0, w) \in F$ (cioè, informalmente, se lo stato raggiunto da A partendo dal suo stato iniziale q_0 e leggendo la stringa w è uno stato finale).
- Il **linguaggio accettato** (**riconosciuto**) da A è

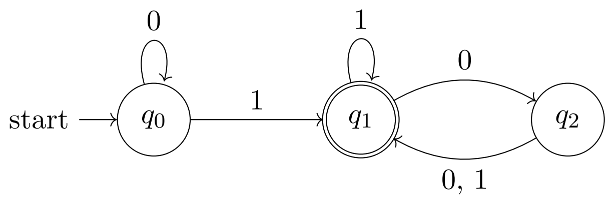
  $$L(A) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}$$

  Si dice che A **riconosce un linguaggio** L se $L(A) = L$.

Intuitivamente, si osserva che queste definizioni sono equivalenti a quelle date in precedenza, basate sulle sequenze di stati/mosse. La funzione di transizione estesa ha il vantaggio di fornire definizioni più compatte e più operative (grazie al trattamento implicito degli stati intermedi).

3 Esempio 1

Si consideri il DFA A descritto dal diagramma



cioè, formalmente,

$$A = \langle \underbrace{\{q_0, q_1, q_2\}}_{Q}, \underbrace{\{0, 1\}}_{\Sigma}, \delta, q_0, \underbrace{\{q_1\}}_{F} \rangle$$

dove la funzione di transizione è

δ	0	1
q_0	q_0	q_1
q_1	q_2	q_1
q_2	q_1	q_1

Si vuole determinare se A riconosca la stringa vuota, cioè se $\epsilon \in L(A)$.

Per definizione, A accetterebbe w se e solo se fosse $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) \in F$, ma $\hat{\delta}(q_0, \epsilon) = q_0 \notin F$ (per la definizione di $\hat{\delta}$ nel caso base), quindi A *non* accetta ϵ: $\epsilon \notin L(A)$.

Osservazione: il caso base $\hat{\delta}(q, \epsilon) = q$ è completamente indipendente dalla funzione di transizione dello specifico automa considerato.

4 Esempio 2

Considerando ancora l'automa dell'esempio precedente, ci si chiede se $01100 \in L(A)$.

Come prima, bisogna determinare se $\hat{\delta}(q_0, 01100) \in F$. Siccome la stringa non è vuota, per calcolare il valore della funzione di transizione estesa bisogna applicare la definizione del caso induttivo: $\hat{\delta}(q_0, 01100) = \delta(\hat{\delta}(q_0, 0110), 0)$, e così via. In pratica, piuttosto che lavorare "all'indietro", seguendo esattamente la definizione, si può rendere più lineare il processo di calcolo considerando i prefissi della stringa di input, partendo dal più corto (ϵ) e aggiungendo ogni volta il carattere successivo della stringa:

$$
\begin{aligned}
\hat{\delta}(q_0, \epsilon) &= q_0 && \text{(caso base)} \\
\hat{\delta}(q_0, 0) &= \delta(\hat{\delta}(q_0, \epsilon), 0) = \delta(q_0, 0) = q_0 && \text{(passo induttivo: } x = \epsilon,\ a = 0\text{)} \\
\hat{\delta}(q_0, 01) &= \delta(\hat{\delta}(q_0, 0), 1) = \delta(q_0, 1) = q_1 && \text{(passo induttivo: } x = 0,\ a = 1\text{)} \\
\hat{\delta}(q_0, 011) &= \delta(\hat{\delta}(q_0, 01), 1) = \delta(q_1, 1) = q_1 && \text{(passo induttivo: } x = 01,\ a = 1\text{)} \\
\hat{\delta}(q_0, 0110) &= \delta(\hat{\delta}(q_0, 011), 0) = \delta(q_1, 0) = q_2 && \text{(passo induttivo: } x = 011,\ a = 0\text{)} \\
\hat{\delta}(q_0, 01100) &= \delta(\hat{\delta}(q_0, 0110), 0) = \delta(q_2, 0) = q_1 && \text{(passo induttivo: } x = 0110,\ a = 0\text{)}
\end{aligned}
$$

Siccome $\hat{\delta}(q_0, 01100) = q_1 \in F$, la stringa 01100 è accettata da A, ovvero $01100 \in L(A)$.