Azzolini Riccardo 2018-12-14

Autovalori regolari e matrici diagonalizzabili

1 Molteplicità algebrica

La **molteplicità algebrica** di un autovalore l è il massimo $m \in \mathbb{N}$ tale che $(\lambda - l)^m$ divide il polinomio caratteristico.

1.1 Esempio

$$f(x, y) = (2x, 2y)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^2$$

$(2-\lambda)^2 = 0$ ha un'unica soluzione, $\lambda = 2$, con molteplicità algebrica 2.

2 Molteplicità geometrica

La **molteplicità geometrica** di un autovalore λ è la dimensione dell'autospazio relativo a λ.

Se A è la matrice associata a un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, allora la molteplicità geometrica di λ è uguale a $n - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n)$.

La molteplicità geometrica è sempre minore o uguale a quella algebrica.

3 Autovalore regolare

Un autovalore è **regolare** se la molteplicità algebrica e geometrica coincidono.

3.1 Esempio

$$f(x, y, z) = (x, -2z, x + 2y + 4z)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -2 \\ 1 & 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(-\lambda(4-\lambda)+4) \\ &= (1-\lambda)(-4\lambda+\lambda^2+4) \\ &= (1-\lambda)(\lambda-2)^2 \end{aligned}$$

Quindi gli autovalori sono le soluzioni di $(1-\lambda)(\lambda-2)^2 = 0$:

- $\lambda = 1$ è un autovalore con molteplicità algebrica 1
- $\lambda = 2$ è un autovalore con molteplicità algebrica 2

Per $\lambda = 1$:

$$A - 1I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg}(A - I) = 2$, quindi $\lambda = 1$ ha molteplicità geometrica $3 - 2 = 1$. Infatti, l'autospazio relativo a esso è:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -\ y - 2z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = -2z \\ x = z \end{cases}$$

$$V_1 = \{(z, -2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \qquad \dim V_1 = 1$$

Per $\lambda = 2$:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Siccome $\operatorname{rg}(A - 2I) = 2$, anche $\lambda = 2$ ha molteplicità geometrica 1. L'autospazio relativo è:

$$\begin{cases} -x \phantom{{}-2y-2z} = 0 \\ - 2y - 2z = 0 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$V_2 = \{(0, -z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \qquad \dim V_2 = 1$$

In conclusione:

- $\lambda = 1$ ha molteplicità algebrica e geometrica 1, quindi è regolare;
- $\lambda = 2$ ha molteplicità algebrica 2 e geometrica 1, quindi *non* è regolare.

4 Base di autovettori

Se tutti gli autovalori di $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sono regolari (e, di conseguenza, la somma delle molteplicità è uguale a n), esiste una base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di f, rispetto alla quale f è rappresentata da una matrice diagonale, quindi f è *diagonalizzabile*.

Come caso particolare, se ci sono n autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, essi sono sempre regolari (con molteplicità 1) e f si rappresenta, nella base di autovettori, con la matrice diagonale:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

4.1 Esempio

$$f(x,y,z) = (x, 2z, x+3y-z)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 1 & 3 & -1-\lambda \end{pmatrix} &= (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(-\lambda(-1-\lambda)-6) \\ &= (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-6) \\ &= (1-\lambda)(\lambda+3)(\lambda-2) \end{aligned}$$

Gli autovalori sono $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ e $\lambda = -3$. Siccome ce ne sono 3, esiste sicuramente una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f.

Per $\lambda = 1$:

$$V_1 = \{(x,y,z) \mid (x, 2z, x+3y-z) = 1(x,y,z)\}$$

$$\begin{cases} x = x \\ 2z = y \\ x+3y-z = z \end{cases} \implies \begin{cases} 0 = 0 \\ -\ y+2z = 0 \\ x+3y-2z = 0 \end{cases}$$

$$A - 1I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rg}(A-1I) = 2$, quindi ci sono ∞^1 soluzioni:

$$\begin{cases} y = 2z \\ x = -4z \end{cases}$$

$$V_1 = \{(-4z, 2z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \qquad B_1 = \{(-4,2,1)\}$$

Per $\lambda = 2$:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$\text{rg}(A - 2I) = 2$, quindi ci sono ∞^1 soluzioni:

$$\begin{cases} -x & = 0 \\ \quad - 2y + 2z = 0 \\ x + 3y - 3z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = z \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$V_2 = \{(0, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\} \qquad B_2 = \{(0, 1, 1)\}$$

Per $\lambda = -3$:

$$A + 3I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$\text{rg}(A + 3I) = 2$, quindi ci sono ∞^1 soluzioni:

$$\begin{cases} 4x & = 0 \\ \quad 3y + 2z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{2}{3}z \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$V_{-3} = \left\{ \left(0, -\frac{2}{3}z, z\right) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \qquad B_{-3} = \{(0, -2, 3)\}$$

$B = B_1 \cup B_2 \cup B_{-3} = \{(-4, 2, 1), (0, 1, 1), (0, -2, 3)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di f. La matrice associata a f in base B è:

$$\begin{gathered} f(-4, 2, 1) = (-4, 2, 1) = 1(-4, 2, 1) + 0(0, 1, 1) + 0(0, -2, 3) \\ f(0, 1, 1) = (0, 2, 2) = 0(-4, 2, 1) + 2(0, 1, 1) + 0(0, -2, 3) \\ f(0, -2, 3) = (0, 6, -9) = 0(-4, 2, 1) + 0(0, 1, 1) - 3(0, -2, 3) \end{gathered}$$

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

5 Matrici simili e diagonalizzabili

Due matrici quadrate $A, B \in M_n$ sono **simili** se esiste $P \in M_n$, con $\det P \neq 0$, tale che $A = P^{-1} \cdot B \cdot P$.

Due matrici simili rappresentano la stessa applicazione lineare in due basi diverse.

Una matrice $A \in M_n$ è **diagonalizzabile** se è simile a una matrice diagonale. A rappresenta allora un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diagonalizzabile, cioè avente degli autovettori che formano una base di $\mathbb{R}^n$.