Azzolini Riccardo 2019-03-05

Limiti di funzioni

1 Definizione di limite

Sia $f : D \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$ un punto di accumulazione per D. Allora, $f(x)$ **tende** a $l \in \mathbb{R}^*$ per x che **tende** a x_0 se $\forall V(l)$ intorno di l $\exists U(x_0)$ intorno di x_0 tale che

$$x \in (U(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D \implies f(x) \in V(l)$$

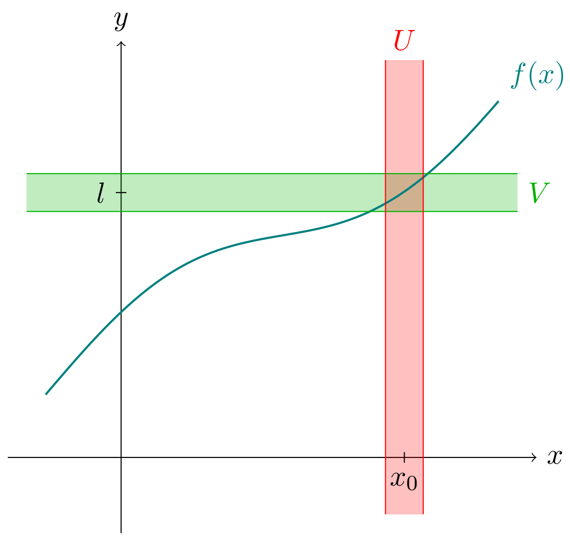
Si dice quindi che l è il **limite di** $f(x)$ **per** x **che tende a** x_0, e si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

Osservazione: se x_0 non fosse un punto di accumulazione per D, alcuni degli insiemi $(U(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D$ sarebbero vuoti, cioè la funzione non sarebbe definita per i valori di x appartenenti a questi insiemi, e in tal caso non avrebbe senso calcolare il limite.

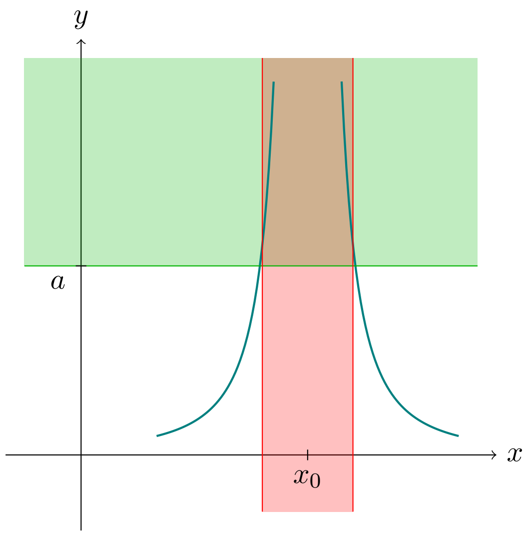
1.1 Interpretazione grafica

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, con $x_0, l \in \mathbb{R}$:



In questo caso, $f(x)$ tende a l per x che tende a x_0 perché, per ogni intorno V di l (“fascia” verde), per quanto piccolo, esiste un intorno U di x_0 (“fascia” rossa) tale che tutti i valori della funzione per $x \in U$ appartengono a V, cioè la parte di grafico nella fascia rossa è contenuta interamente anche dalla fascia verde.

Analogamente per le altre combinazioni di x_0 e l finiti e infiniti, come ad esempio $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, con $x_0 \in \mathbb{R}$:



1.2 Esempi

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

perché, $\forall V$ intorno di 0, cioè $\forall \varepsilon > 0$, $V = (-\varepsilon, \varepsilon)$, si ha $f(x) \in V$ se:

$$\begin{aligned} \overbrace{-\varepsilon < x^2}^{\forall x\in\mathbb{R}} < \varepsilon &\iff |x| < \sqrt{\varepsilon} \\ &\iff -\sqrt{\varepsilon} < x < \sqrt{\varepsilon} \\ &\iff x \in (-\sqrt{\varepsilon}, \sqrt{\varepsilon}) = U(0) \quad \exists \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} = +\infty$$

perché, $\forall V$ intorno di $+\infty$, cioè $\forall a \in \mathbb{R}$, $V = (a, +\infty)$, con $a > 0$ (per comodità), si ha $f(x) \in V$ se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^4} > a &\iff x^4 < \frac{1}{a} \\ &\iff |x| < \frac{1}{\sqrt[4]{a}} \\ &\iff -\frac{1}{\sqrt[4]{a}} < x < \frac{1}{\sqrt[4]{a}} \\ &\iff x \in \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{a}}, \frac{1}{\sqrt[4]{a}}\right) = U(0) \quad \exists \end{aligned}$$

2 Unicità del limite

Teorema: Sia $f : D \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$ un punto di accumulazione per D. Se esiste $\lim_{x \to x_0} f(x)$, allora questo limite è unico.

Dimostrazione: Supponiamo che esistano $l_1, l_2 \in \mathbb{R}^*$, con $l_1 \neq l_2$, tali che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$.

Siano V_1 un intorno di l_1 e V_2 un intorno di l_2, tali che $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ (siccome $l_1 \neq l_2$, ciò è sempre possibile).

Dato che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$, $\exists U_1$ intorno di x_0 tale che

$$x \in (U_1 \setminus \{x_0\}) \cap D \implies f(x) \in V_1$$

Analogamente, dato che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_2$, $\exists U_2$ intorno di x_0 tale che

$$x \in (U_2 \setminus \{x_0\}) \cap D \implies f(x) \in V_2$$

Siccome l'intersezione di due intorni dello stesso numero non è mai vuota, si ha che

$$x \in (U_1 \cap U_2 \setminus \{x_0\}) \cap D \implies f(x) \in V_1 \cap V_2 = \varnothing \quad \square$$

3 Punto di accumulazione destro e sinistro

Sia $D \subseteq \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. x_0 è un **punto di accumulazione destro** (**sinistro**) per D se è un punto di accumulazione per $D \cap (x_0, +\infty)$ $(D \cap (-\infty, x_0))$.

Osservazione: x_0 non può essere $\pm\infty$ perché non ha senso parlare di “destra di $+\infty$” o “sinistra di $-\infty$”.

3.1 Esempio

$$D = [1, 5) \cup \{7\}$$

I punti di accumulazione per D sono tutti i punti appartenenti a $[1, 5]$. Di questi:

- 1 è un punto di accumulazione destro, ma non sinistro, perché i suoi intorni intersecano D solo a destra;
- 5 è un punto di accumulazione sinistro, ma non destro, perché alcuni i suoi intorni intersecano D solo a sinistra;
- ogni punto interno, cioè appartenente a $(1, 5)$, è un punto di accumulazione sia destro che sinistro.

4 Intorno destro e sinistro

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$.

- Un **intorno destro** di x_0 è un intervallo del tipo $[x_0, x_0 + \varepsilon)$.
- Un **intorno sinistro** di x_0 è un intervallo del tipo $(x_0 - \varepsilon, x_0]$.

5 Limite destro e sinistro

Sia $f : D \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione destro (sinistro) per D. $f(x)$ tende a $l \in \mathbb{R}^*$ per x che tende a x_0 **da destra** (**da sinistra**) se $\forall V$ intorno di l $\exists [x_0, x_0+\varepsilon)$ intorno destro ($\exists (x_0-\varepsilon, x_0]$ intorno sinistro) di x_0 tale che se $x \in (x_0, x_0+\varepsilon)$ ($x \in (x_0-\varepsilon, x_0)$) si ha $f(x) \in V$. Si scrive allora

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l \qquad \left(\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l\right)$$

5.1 Esistenza del limite

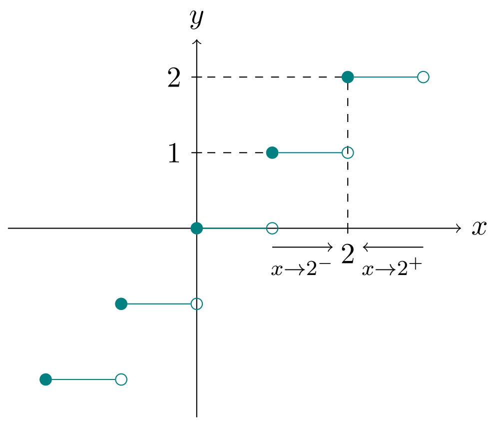
Osservazione: Sia $f : D \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto di accumulazione destro e sinistro per D. Allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}^* \iff \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l$$

altrimenti il limite per $x \to x_0$ non esiste.

5.2 Esempio: funzione parte intera

$$f(x) = [x] \quad \text{parte intera di } x$$



$$\lim_{x\to 2^-} [x] = 1 \qquad \lim_{x\to 2^+} [x] = 2$$

$$\lim_{x\to 2^-} [x] \neq \lim_{x\to 2^+} [x] \implies \nexists \lim_{x\to 2} [x]$$

5.3 Esempio: funzione definita a tratti

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{se } x \geq 1 \\ ax & \text{se } x < 1, \text{ con } a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Si vuole trovare il valore di a, se esiste, tale che $\lim_{x\to 1} f(x)$ esista:

$$\exists \lim_{x\to 1} f(x) \iff \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} ax = a$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2x^2 = 2$$

quindi il limite esiste per $a = 2$.

6 Permanenza del segno

Teorema: Sia $f : D \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$ un punto di accumulazione per D. Se $\lim_{x\to x_0} f(x)$ $= l \in \mathbb{R}^*$ e se $l > 0$ ($l < 0$), allora $\exists U$ intorno di x_0 tale che

$$f(x) > 0 \;\; (f(x) < 0) \quad \forall x \in (U \setminus \{x_0\}) \cap D$$

Dimostrazione:

- Sia $l \in \mathbb{R}$, $l > 0$. Per la definizione di limite, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists U(x_0)$ intorno di x_0 tale che, $\forall x \in (U(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D$,

  $$f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \iff l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

  Siccome $l > 0$, è sempre possibile scegliere un $\varepsilon > 0$ tale che $l - \varepsilon > 0$. Allora

  $$\underbrace{0 <}\, l - \varepsilon < \underbrace{f(x)} < l + \varepsilon$$

- Sia invece $l = +\infty$. Se $a > 0$, $(a, +\infty]$ è un intorno di $+\infty$ e, per la definizione di limite, $\exists U(x_0)$ intorno di x_0 tale che, $\forall x \in (U(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap D$,

  $$f(x) \in (a, +\infty] \iff \underbrace{f(x)} > a \underbrace{> 0}$$

- Per $l < 0$, la dimostrazione è analoga. $\square$

7 Algebra dei limiti

Siano $f, g : D \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$ un punto di accumulazione per D e siano $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ (quindi non $\pm\infty$).

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = l_2$, allora:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = l_1 \pm l_2$$

$$\lim_{x \to x_0} cf(x) = cl_1 \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = l_1 l_2$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2} \quad \text{se } l_2 \neq 0$$