Azzolini Riccardo 2020-02-20

Proprietà insiemistiche

1 Proprietà elementari degli insiemi

Alcune proprietà elementari delle operazioni sugli insiemi sono:

- Proprietà *commutativa*:

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

- *Idempotenza*:

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

- Proprietà del vuoto:

$$A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing \cap A = \varnothing$$

- *Assorbimento*: se $A' \subseteq A$, allora

$$A \cup A' = A$$
$$A \cap A' = A'$$

  Ad esempio:

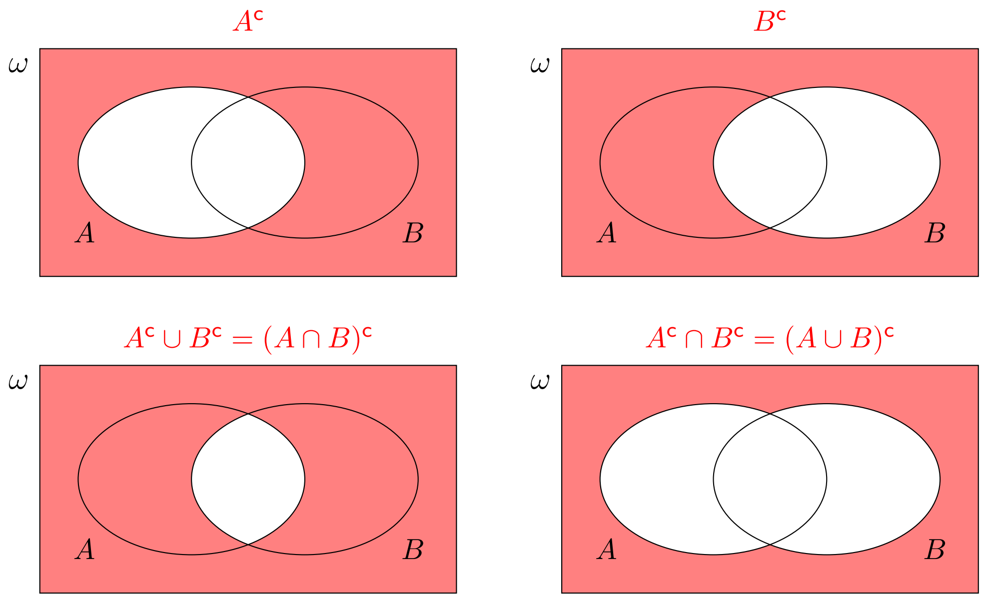
$$A \cup (A \cap B) = A$$
$$A \cap (A \cup B) = A$$

- Se ω è l'intero spazio (cioè tutti gli insiemi su cui si lavora sono considerati sottoinsiemi di ω), allora

$$\omega \cup A = \omega$$
$$\omega \cap A = A$$
$$A \cup A^{\mathsf{c}} = \omega$$
$$A \cap A^{\mathsf{c}} = \varnothing$$

- Teoremi di *De Morgan*:

$$A^{\mathsf{c}} \cup B^{\mathsf{c}} = (A \cap B)^{\mathsf{c}}$$
$$A^{\mathsf{c}} \cap B^{\mathsf{c}} = (A \cup B)^{\mathsf{c}}$$



- Proprietà *associativa*:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- Legge *distributiva*
  - dell'unione rispetto all'intersezione:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

  - dell'intersezione rispetto all'unione:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Attenzione: Questa proprietà non deve essere confusa con quella associativa. Infatti, in generale,

$$A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cap C$$

Ad esempio, con $C = \varnothing$,

$$A \cup (B \cap C) = A \cup (B \cap \varnothing) = A \cup \varnothing = A$$
$$(A \cup B) \cap C = (A \cup B) \cap \varnothing = \varnothing$$

2 Regole definitorie del calcolo delle probabilità

Dalla definizione di spazio di probabilità e dalle proprietà degli insiemi, si ricavano immediatamente varie regole. Ad esempio:

- Se $A \in \mathscr{A}$, allora
$$P(A^\mathsf{c}) = 1 - P(A)$$

  Dimostrazione: Per le proprietà degli insiemi, valgono
$$\begin{gathered} \Omega = A^\mathsf{c} \cup A \\ A^\mathsf{c} \cap A = \varnothing \end{gathered}$$

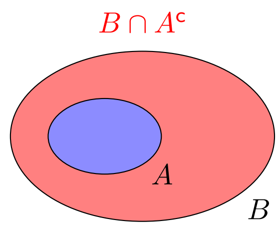
  In particolare, la seconda di queste uguaglianze indica che A^c e A sono eventi disgiunti. È allora possibile applicare la regola per il calcolo della probabilità di eventi disgiunti, data dalla definizione di probabilità:
$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$$

  Si può quindi scrivere
$$P(\Omega) = P(A^\mathsf{c} \cup A) = P(A^\mathsf{c}) + P(A)$$

  e, siccome, ancora per la definizione di probabilità, $P(\Omega) = 1$, si ottiene infine
$$\begin{aligned} 1 &= P(A^\mathsf{c}) + P(A) \\ P(A^\mathsf{c}) &= 1 - P(A) \qquad \square \end{aligned}$$

- Se $A \subseteq B$, allora
$$P(A) \le P(B)$$

  Dimostrazione: Innanzitutto, si costruiscono due eventi disgiunti, A e $B \cap A^\mathsf{c}$.



  Essi sono disgiunti perché:
$$\begin{aligned} A \cap (B \cap A^\mathsf{c}) &= A \cap (A^\mathsf{c} \cap B) && \text{(proprietà commutativa)} \\ &= (A \cap A^\mathsf{c}) \cap B && \text{(proprietà associativa)} \\ &= \varnothing \cap B && \text{(intersezione con il complemento)} \\ &= \varnothing && \text{(intersezione con l'insieme vuoto)} \end{aligned}$$

Per le proprietà degli insiemi, l'unione $A \cup (B \cap A^c)$ di tali eventi è $A \cup B$,

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap A^c) &= (A \cup B) \cap (A \cup A^c) && \text{(proprietà distributiva)} \\ &= (A \cup B) \cap \Omega && \text{(unione con il complemento)} \\ &= A \cup B && \text{(intersezione con lo spazio totale)} \end{aligned}$$

e, per l'ipotesi $A \subseteq B$, applicando l'assorbimento si ha che

$$A \cup B = B$$

Allora,

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cup B) \\ &= P(A \cup (B \cap A^c)) \\ &= P(A) + P(B \cap A^c) \end{aligned}$$

per la regola della probabilità di eventi disgiunti. Infine, siccome $B \cap A^c$ è un insieme non necessariamente vuoto, e siccome, per la definizione di $P : \mathscr{A} \to [0, 1]$, deve essere $P(B \cap A^c) = c \in [0, 1]$, vale

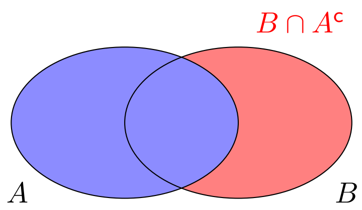
$$P(B) = P(A) + c$$

ovvero

$$P(B) \geq P(A) \qquad \square$$

- Dalla dimostrazione della proprietà precedente, si ricava che la probabilità di due eventi non necessariamente disgiunti è:

  $$P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A^c)$$

  Un altro modo per scrivere tale probabilità è

  $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

  perché, in modo intuitivo, nel caso in cui A e B non siano disgiunti,[1] la probabilità di A comprende anche quella di $A \cap B$, e lo stesso vale per la probabilità di B, quindi la probabilità di $A \cap B$ viene "contata due volte". Per "correggere" il risultato, è quindi sufficiente sottrarre una volta $P(A \cap B)$.

[1] Nel caso in cui A e B siano invece disgiunti, la formula vale comunque: siccome $A \cap B = \varnothing$, e $P(\varnothing) = 0$, essa si semplifica infatti a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, che è appunto la regola per il calcolo della probabilità dell'unione di eventi disgiunti.

- Da De Morgan,

$$P\left[\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{\mathsf{c}}\right] = P\left[\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{\mathsf{c}}\right] = 1 - P\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right]$$

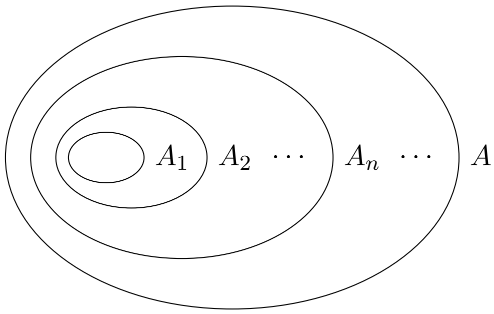
  cioè, a livello intuitivo, la probabilità che *non si verifichi nessuno* degli eventi A_n è uguale a 1 meno la probabilità che *si verifichi almeno uno* di essi.

- Sia $\{A_n\}_{n=1,\infty}$ una successione monotona crescente di eventi $A_n \in \mathscr{A}$,

$$A_1 \subset A_n \subset A_{n+1} \subset \cdots$$

  e sia $A \in \mathscr{A}$ l'unione di tutti gli infiniti eventi della successione:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$$



  Allora,

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$$

  Dimostrazione: Dalla successione $\{A_n\}$, si ricava un'altra successione $\{B_n\}$ di eventi disgiunti,

$$\begin{aligned} &B_1 = A_1 \\ &B_n = A_n \setminus A_{n-1} \quad \text{per } n > 1 \end{aligned}$$

$$B_n \cap B_m = \varnothing \quad \text{se } n \neq m$$

  che corrispondono agli "anelli" del diagramma di Venn riportato sopra. Allora, valgono

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^{n} B_i = A_n \\ \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = A \end{aligned}$$

e, quindi:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(A_n) &= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i) && \text{(probabilità di eventi disgiunti)} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) \\
&= P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) && \text{(probabilità di eventi disgiunti)} \\
&= P(A) \qquad \square
\end{aligned}$$

Nota: Non è ammesso il passaggio diretto

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$$

perché esso sarebbe un'applicazione di questa stessa proprietà che si sta cercando di dimostrare (e, ovviamente, non è ammesso dimostrare una proprietà sfruttando la proprietà stessa, altrimenti qualsiasi proprietà, anche non valida, sarebbe dimostrabile).