Azzolini Riccardo 2020-03-19

Probabilità condizionata e indipendenza – Esercizi

1 Problema: componenti difettosi

Problema: Una fabbrica produce componenti che possono presentare due tipi di difetti, A e B, con probabilità del 3 % e del 7 %, rispettivamente. Siccome i due tipi di difetti vengono introdotti in momenti diversi della produzione, si assume che la presenza dell'uno e dell'altro siano indipendenti. Determinare la probabilità che un componente:

1. presenti entrambi i difetti;
2. sia difettoso, cioè presenti almeno uno dei due difetti;
3. presenti il difetto A, sapendo che tale componente è difettoso;
4. presenti uno solo dei due difetti, sapendo che è difettoso.

Soluzioni:

1. La presenza di entrambi i difetti corrisponde all'evento $A \cap B$, la cui probabilità è
$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B) = 0.03 \cdot 0.07 = 0.0021 = 0.21\ \%$$
perché gli eventi A e B sono indipendenti.
2. Un pezzo è difettoso se si verifica l'evento $A \cup B$, la cui probabilità può essere calcolata con la formula della probabilità dell'unione nel caso generale (ovvero di eventi anche non disgiunti):
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.03 + 0.07 - 0.0021 = 0.0979 = 9.79\ \%$$
3. La probabilità da calcolare in questo caso è $P(A \mid A \cup B)$. Si applica perciò la formula della probabilità condizionata:
$$\begin{aligned} P(A \mid A \cup B) &= \frac{P(\overbrace{A \cap (A \cup B)}^{=A \text{ per assorbimento}})}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} \\ &= \frac{0.03}{0.0979} \approx 0.306 = 30.6\ \% \end{aligned}$$

4. La presenza di uno solo dei due difetti è rappresentata dall'evento

$$\overbrace{(A \cap B^{\mathsf{c}})}^{\text{solo il difetto } A} \cup \underbrace{(A^{\mathsf{c}} \cap B)}_{\text{solo il difetto } B}$$

quindi la soluzione più immediata sarebbe calcolare la probabilità condizionata

$$P((A \cap B^{\mathsf{c}}) \cup (A^{\mathsf{c}} \cap B) \mid A \cup B)$$

ma ciò comporterebbe parecchi calcoli. Si può invece osservare che il condizionamento rispetto all'evento $A \cup B$ (cioè al fatto che il pezzo sia difettoso) garantisce già la presenza di almeno uno dei due difetti, quindi è sufficiente determinare la probabilità condizionata che *non siano presenti entrambi*:

$$\begin{aligned} P((A \cap B)^{\mathsf{c}} \mid A \cup B) &= 1 - P(A \cap B \mid A \cup B) \\ &= 1 - \frac{P((A \cap B) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)} \\ &= 1 - \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} && \text{(assorbimento)} \\ &= 1 - \frac{0.0021}{0.0979} \approx 0.979 = 97.9\ \% \end{aligned}$$

2 Problema: numeri di telefono

Problema: Per impedire ai suoi dipendenti di effettuare chiamate interurbane (che corrispondono a numeri che iniziano con 0), un datore di lavoro blocca l'inserimento dello 0 sui telefoni. In questo modo, però, non possono neanche essere composti alcuni numeri urbani, dato che essi possono comunque contenere degli 0 (tranne che come prima cifra). Qual è la probabilità che un numero urbano di 8 cifre (delle quali la prima è, appunto, diversa da 0) possa effettivamente essere chiamato?

Soluzioni:

- La soluzione più semplice si basa sul calcolo combinatorio, considerando lo spazio campionario

  $$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_8) \mid \omega_1 \in \{1, \dots, 9\},\ \omega_i \in \{0, \dots, 9\}\ \forall i \neq 1\}$$

  e l'evento

  $$A = \text{“nessuna cifra è 0”} = \{(\omega_1, \dots, \omega_8) \mid \omega_i \in \{1, \dots, 9\}\ \forall i\}$$

  la cui probabilità è:

  $$P(A) = \frac{\# A}{\# \Omega} = \frac{9^8}{9 \cdot 10^7} = \frac{9^7}{10^7} = \left(\frac{9}{10}\right)^7 \approx 0.48 = 48\ \%$$

- Una soluzione alternativa, anche se più complicata, sfrutta il fatto che ciascuna cifra sia indipendente dalle altre, definendo gli eventi

$$A_i = \text{“l'}i\text{-esima cifra non è 0”} \quad i = 2, ..., 8$$

(non è necessario considerare la prima cifra, che è sicuramente diversa da 0). Ciascuno di questi eventi ha probabilità $P(A_i) = \frac{9}{10}$, e allora, per la definizione di indipendenza, la probabilità che si verifichino tutti, ovvero che il numero possa essere chiamato, è

$$P(A_2 \cap \cdots \cap A_8) = P(A_2) \cdots P(A_8) = \left(\frac{9}{10}\right)^7$$

uguale a quella calcolata nell'altra soluzione.

3 Problema: palline colorate

Problema: Un'urna contiene 20 palline colorate: 8 rosse, 3 bianche e 9 nere. Vengono estratte a caso tre palline, *senza* rimettere ciascuna di esse nell'urna dopo l'estrazione (in modo da assicurare che le palline estratte siano diverse). Determinare la probabilità che esse siano:

1. tutte e tre rosse;
2. almeno una bianca;
3. una per ciascun colore, senza considerare l'ordine di estrazione;
4. una rossa, una bianca e una nera, in quest'ordine.

Soluzioni:

1. La probabilità che tutte e tre le palline estratte siano rosse può essere determinata mediante il calcolo combinatorio: ci sono $\binom{8}{3}$ modi di scegliere, senza considerare l'ordine, 3 palline rosse tra le 8 disponibili (casi favorevoli), e $\binom{20}{3}$ modi di scegliere 3 palline qualsiasi (casi possibili).

$$P(\text{“escono tre palline rosse”}) = \frac{\dbinom{8}{3}}{\dbinom{20}{3}} \approx 0.0491 = 4.91\ \%$$

Come soluzione alternativa, si può ricorrere alla probabilità condizionata. Per prima cosa, si definiscono gli eventi

$$R_i = \text{“la } i\text{-esima pallina estratta è rossa”} \quad i = 1, 2, 3$$

Alla prima estrazione, ci sono 8 palline rosse su 20, quindi $P(R_1) = \frac{8}{20}$. Supponendo che ne venga estratta una rossa, per la seconda estrazione ne rimangono 7 rosse su 19, ovvero $P(R_2 \mid R_1) = \frac{7}{19}$. Infine, se le prime due palline estratte sono rosse, alla terza e ultima estrazione ne rimangono 6 rosse su 18: $P(R_3 \mid R_2 \cap R_1) = \frac{6}{18}$. Allora, la probabilità che tutte e tre le palline estratte siano rosse è

$$\begin{aligned} P(R_3 \cap R_2 \cap R_1) &= P(R_3 \mid R_2 \cap R_1)\, P(R_2 \cap R_1) \\ &= P(R_3 \mid R_2 \cap R_1)\, P(R_2 \mid R_1)\, P(R_1) \\ &= \frac{6}{18} \cdot \frac{7}{19} \cdot \frac{8}{20} \approx 0.0491 = 4.91\ \% \end{aligned}$$

uguale al risultato ottenuto con il calcolo combinatorio.

2. Per valutare la probabilità che almeno una pallina estratta sia bianca conviene considerare l'evento complementare, cioè il caso in cui nessuna delle palline è bianca. Per il resto, si applica il calcolo combinatorio, come per la domanda 1.

$$\begin{aligned} P(\text{“esce almeno una pallina bianca”}) &= 1 - P(\text{“non escono palline bianche”}) \\ &= 1 - \frac{\binom{17}{3}}{\binom{20}{3}} \approx 1 - 0.596 = 0.404 = 40.4\ \% \end{aligned}$$

Nota: 17 è il numero di palline non bianche, perciò $\binom{17}{3}$ è, appunto, il numero di modi di estrarre 3 palline non bianche.

Anche qui, come per la domanda 1, ci sono soluzioni alternative basate sulla probabilità condizionata, che risultano però più complicate.

3. Anche in questo caso esistono sia una soluzione basata sul calcolo combinatorio che una basata sulla probabilità condizionata, e la prima è più semplice:

$$P(\text{“esce una pallina per colore”}) = \frac{\binom{8}{1}\binom{3}{1}\binom{9}{1}}{\binom{20}{3}} = \frac{8 \cdot 3 \cdot 9}{\binom{20}{3}} \approx 0.189 = 18.9\ \%$$

4. La probabilità che escano, in ordine, una pallina rossa, una bianca e una nera può essere determinata mediante il calcolo combinatorio:

- ci sono $8 \cdot 3 \cdot 9$ modi di scegliere una pallina rossa, una bianca e una nera;
- i modi di scegliere tre palline qualsiasi, considerando l'ordine, sono $D_{20,3}$.

$$\begin{aligned} &P(\text{“escono una pallina rossa, una bianca e una nera, in quest'ordine”}) \\ &= \frac{8 \cdot 3 \cdot 9}{D_{20,3}} = \frac{8 \cdot 3 \cdot 9}{20 \cdot 19 \cdot 18} \approx 0.0316 = 3.16\ \% \end{aligned}$$

Invece, con la probabilità condizionata, bisogna considerare gli eventi

$$\begin{aligned}
R_1 &= \text{“la prima pallina estratta è rossa”} \\
B_2 &= \text{“la seconda pallina estratta è bianca”} \\
N_3 &= \text{“la terza pallina estratta è nera”}
\end{aligned}$$

e calcolare la probabilità che si verifichino tutti e tre:

$$\begin{aligned}
P(N_3 \cap B_2 \cap R_1) &= P(N_3 \mid B_2 \cap R_1)\, P(B_2 \mid R_1)\, P(R_1) \\
&= \frac{9}{18} \cdot \frac{3}{19} \cdot \frac{8}{20} \approx 3.16\ \%
\end{aligned}$$

4 Problema: lancio di un dado

Problema: Si lancia un dado; verificare se gli eventi

$$\begin{aligned}
A &= \text{“esce un numero pari”} \\
B &= \text{“esce un numero maggiore di 3”}
\end{aligned}$$

sono indipendenti.

Lo spazio campionario è $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$, perciò

$$\begin{aligned}
A &= \{2, 4, 6\} \qquad P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\
B &= \{4, 5, 6\} \qquad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Per determinare se essi sono indipendenti, bisogna considerare la loro intersezione, $A \cap B = \{4, 6\}$. Siccome

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \neq P(A)\, P(B) = \frac{1}{4}$$

gli eventi A e B *non* sono indipendenti.

5 Problema: due lanci di un dado

Problema: Si effettuano due lanci di un dado. Stabilire se gli eventi

$$\begin{aligned}
A &= \text{“il risultato del primo lancio è pari”} \\
B &= \text{“il risultato del secondo lancio è minore o uguale a 2”}
\end{aligned}$$

sono indipendenti.

Lo spazio campionario è costituito da tutte le coppie di numeri $1, \ldots, 6$:

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \mid \omega_i \in \{1, \ldots, 6\}\} \quad \#\,\Omega = 6 \cdot 6 = 36$$

L'evento A impone che il primo lancio dia un risultato pari, mentre ammette qualsiasi esito per il secondo lancio:

$$A = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \mid \omega_1 \in \{2, 4, 6\}\} \quad \#\,A = 3 \cdot 6 = 18$$

Invece, B ammette qualsiasi risultato per il primo lancio, ma solo 1 o 2 per il secondo:

$$B = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \mid \omega_2 \in \{1, 2\}\} \quad \#\,B = 6 \cdot 2 = 12$$

Le probabilità di questi due eventi sono allora:

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

L'intersezione dei due eventi è

$$A \cap B = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \mid \omega_1 \in \{2, 4, 6\},\ \omega_2 \in \{1, 2\}\} \quad \#(A \cap B) = 3 \cdot 2 = 6$$

e la sua probabilità è

$$P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = P(A)\,P(B)$$

quindi A e B sono eventi indipendenti.

6 Problema: due urne

Problema: Si hanno due urne, ciascuna delle quali contiene palline bianche e nere: nell'urna 1 sono nere il 70 % delle palline, mentre nell'urna 2 sono nere il 40 % delle palline. La probabilità di scegliere l'urna 1 per l'estrazione è del 10 %, e di conseguenza quella di scegliere invece l'urna 2 è del 90 %. Calcolare la probabilità che una pallina nera estratta a caso provenga dall'urna 1.

In simboli, gli eventi considerati sono

$$\begin{aligned} U_1 &= \text{“si estrae dall'urna 1”} \\ U_2 &= \text{“si estrae dall'urna 2”} \\ N &= \text{“viene estratta una pallina nera”} \end{aligned}$$

e sono note le seguenti probabilità:

$$P(U_1) = 0.1 \quad P(U_2) = 0.9 \qquad \begin{aligned} P(N \mid U_1) &= 0.7 \\ P(N \mid U_2) &= 0.4 \end{aligned}$$

Il problema richiede di calcolare la probabilità $P(U_1 \mid N)$, che può essere ricavata attraverso le formule di Bayes e della probabilità totale (quest'ultima può essere usata perché gli eventi U_1 e U_2 formano una partizione di Ω):

$$\begin{aligned}
P(U_1 \mid N) &= \frac{P(N \mid U_1)\,P(U_1)}{P(N)} \\
&= \frac{P(N \mid U_1)\,P(U_1)}{P(N \mid U_1)\,P(U_1) + P(N \mid U_2)\,P(U_2)} \\
&= \frac{0.7 \cdot 0.1}{0.7 \cdot 0.1 + 0.4 \cdot 0.9} \approx 0.163 = 16.3\ \%
\end{aligned}$$

7 Problema: test per una malattia

Problema: Un test per una data malattia rara ha

- una sensibilità (probabilità di dare un risultato positivo per un individuo malato) di circa 0.993;
- una specificità (probabilità di dare un risultato negativo per un individuo sano) pari a circa 0.9999.

La probabilità di contrarre tale malattia è circa 0.000025. Calcolare le probabilità che un individuo sia

- effettivamente malato, se il test risulta positivo;
- effettivamente sano, se il test risulta negativo.

Gli eventi e le probabilità dati dalla descrizione del problema sono

$$\begin{aligned}
M &= \text{“l'individuo è malato”} & P(M) &= 0.000025 \\
S &= \text{“l'individuo è sano”} & P(S) &= 1 - P(M) = 0.999975 \\
\mathit{Pos} &= \text{“il test risulta positivo”} & P(\mathit{Pos} \mid M) &= 0.993 \\
\mathit{Neg} &= \text{“il test risulta negativo”} & P(\mathit{Neg} \mid S) &= 0.9999
\end{aligned}$$

ed è richiesto il calcolo di $P(M \mid \mathit{Pos})$ e $P(S \mid \mathit{Neg})$.

Le probabilità richieste possono essere calcolate applicando le formule di Bayes e della probabilità totale. Siccome gli eventi *Pos* e *Neg* formino una partizione di Ω, la probabilità di uno dei due può essere ricavata da quella dell'altro, riducendo così la quantità di calcoli da effettuare:

$$\begin{aligned}
P(Pos) &= P(Pos \mid M)\, P(M) + P(Pos \mid S)\, P(S) \\
&= P(Pos \mid M)\, P(M) + (1 - P(Neg \mid S))\, P(S) \\
&= 0.993 \cdot 0.000025 + (1 - 0.9999) \cdot 0.999975 \\
&\approx 0.00012482
\end{aligned}$$

$$P(Neg) = 1 - P(Pos) \approx 0.99987518$$

Queste probabilità totali vengono poi come denominatori nella formula di Bayes:

$$P(M \mid Pos) = \frac{P(Pos \mid M)\, P(M)}{P(Pos)} \approx \frac{0.993 \cdot 0.000025}{0.00012482} \approx 0.1988864 = 19.88864\ \%$$

$$P(S \mid Neg) = \frac{P(Neg \mid S)\, P(S)}{P(Neg)} \approx \frac{0.9999 \cdot 0.999975}{0.99987518} \approx 0.9999998 = 99.99998\ \%$$