Azzolini Riccardo 2020-05-25

Sostituzioni

1 Sostituzioni sulle variabili di un termine

Definizione:[1] Siano s e t termini su A, e sia x una variabile. Si indica con $s[t/x]$ il termine che si ottiene sostituendo t al posto di (tutte le occorrenze di) x in s.

Ad esempio, siano $s = f(x, g(x, c))$ e $t = f(c, c)$. Allora:

$$s[t/x] = f(f(c, c), g(f(c, c), c))$$

1.1 Differenza tra assegnamenti e sostituzioni

Non bisogna fare confusione tra assegnamenti e sostituzioni. Infatti:

- Gli assegnamenti servono a interpretare le variabili sul dominio di un modello. In particolare, un assegnamento $e : VAR \to D$ (su $\mathcal{M} = (D, I)$) fornisce un mapping da un termine in un elemento del dominio, producendo quindi un elemento che *non* è un elemento sintattico del linguaggio (ma è invece, appunto, un elemento del dominio del modello).
- Una sostituzione trasforma un termine (che è un elemento sintattico del linguaggio) in un altro termine (anch'esso un elemento sintattico del linguaggio).

1.2 Osservazione

In generale, il termine generato da una sostituzione è *meno generico* di quello di partenza.

Ad esempio, dato il modello $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, I)$, dove

$$\begin{aligned} I(f) : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad & \widetilde{\forall} n \in \mathbb{N}\ \ I(f)(n) = 1 \\ I(g) : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad & \widetilde{\forall} n \in \mathbb{N}\ \ I(g)(n) = n \end{aligned}$$

si considerino i termini

- $g(x)$

[1] Qui si dà una definizione "intuitiva". La definizione formale sarebbe invece per induzione strutturale su s.

- $g(f(y))$, ottenuto dal precedente mediante la sostituzione $g(x)[f(y)/x]$.

In fase di valutazione, scegliendo un arbitrario assegnamento:

- in $g(x)$ l'argomento di g può variare su tutti i possibili elementi del dominio (che, per $\mathcal{M}$, sono i numeri naturali);
- in $g(f(y))$, l'argomento di g varia solo sugli elementi dell'immagine della funzione $I(f)$, cioè su tutti i possibili valori ottenuti applicando la funzione $I(f)$ ai valori del dominio (nell'esempio, solo sul valore 1).

2 Sostituzione sulle formule

Lo scopo di una sostituzione su una formula è istanziare una data variabile a un caso più particolare (un termine). Comunque, il significato della formula non deve essere stravolto: in particolare, bisogna fare attenzione al caso in cui il termine sostituito contiene delle variabili che sono quantificate all'interno della formula.

Ad esempio, dato il modello $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, I)$ dove

$$I(M) = \{(n, m) \mid n < m\}$$

(cioè M è interpretato come *minore*):

- La formula $\exists y M(y, x)$ è vera rispetto a qualunque assegnamento su $\mathcal{A}$ (per ogni numero intero d, assegnato a x, ne esiste uno d' che è strettamente minore: $d' < d$);
- La formula $\exists y M(y, y)$, che potrebbe ipoteticamente essere ottenuta dalla precedente sostituendo x con y, è falsa per ogni assegnamento (per ogni $d \in \mathbb{Z}$, non è vero che $d < d$).

Volendo preservare la soddisfacibilità della formula, stabilisce invece che, nell'effettuare la sostituzione $(\exists y M(y, x))[y/x]$, bisogna anche rimpiazzare la variabile legata y con una nuova, che non compare nella formula, ottenendo quindi (ad esempio) $\exists z M(z, y)$.

Definizione: Siano φ una formula e t un termine (sull'alfabeto A). La formula $\varphi[t/x]$ ottenuta sostituendo t per x in φ è così definita (per induzione strutturale su φ):

- Se $\varphi = P(t_1, \dots, t_n)$ è atomica, allora
$$\varphi[t/x] = P(t_1[t/x], \dots, t_n[t/x])$$
- Se $\varphi = \neg\psi$, allora
$$\varphi[t/x] = \neg\psi[t/x]$$
- Se $\varphi = \psi_1 * \psi_2$, con $* \in \{\wedge, \vee, \to\}$, allora
$$\varphi[t/x] = \psi_1[t/x] * \psi_2[t/x]$$

- Se $\varphi = \forall y \psi$, allora

$$(\forall y\psi)[t/x] = \begin{cases} \forall y\psi & \text{se } x = y \\ \forall y(\psi[t/x]) & \text{se } x \neq y \text{ e } y \notin \mathrm{FV}(t) \\ \forall z(\psi[z/y][t/x]) & \text{se } x \neq y \text{ e } y \in \mathrm{FV}(t) \end{cases}$$

  dove z è una nuova variabile.

  - Se la variabile x che si vuole sostituire è la stessa che è legata dal quantificatore ($x = y$), non si effettua alcuna sostituzione, perché le sostituzioni devono agire solo sulle variabili libere.
  - Altrimenti, se la variabile sostituita x è libera in φ, si esegue la sostituzione su ψ, ma, se la variabile legata y compare nel termine t, bisogna prima rimpiazzare y con una nuova variabile z (come anticipato prima), in modo che le occorrenze di y in t rimangano libere quando esso viene inserito nella formula.

- Se $\varphi = \exists y \psi$, allora

$$(\exists y\psi)[t/x] = \begin{cases} \exists y\psi & \text{se } x = y \\ \exists y(\psi[t/x]) & \text{se } x \neq y \text{ e } y \notin \mathrm{FV}(t) \\ \exists z(\psi[z/y][t/x]) & \text{se } x \neq y \text{ e } y \in \mathrm{FV}(t) \end{cases}$$

  dove z è una nuova variabile. Questo caso è del tutto analogo a quello del quantificatore universale $\forall$.

2.1 Esempio

Siano $\varphi = \forall y(A(y) \to B(f(x), y)$ e $t = g(y)$. Allora:

$$\begin{aligned} \varphi[t/x] &= (\forall y(A(y) \to B(f(x), y)))[t/x] \\ &= \forall z\big((A(y) \to B(f(x), y))[z/y][t/x]\big) \\ &= \forall z\big((A(y)[z/y] \to B(f(x), y)[z/y])[t/x]\big) \\ &= \forall z\big((A(z) \to B(f(x), z))[t/x]\big) \\ &= \forall z\big(A(z)[t/x] \to B(f(x), z)[t/x]\big) \\ &= \forall z(A(z) \to B(f(t), z)) \\ &= \forall z(A(z) \to B(f(g(y)), z)) \end{aligned}$$

3 Lemma di sostituzione

Il seguente lemma afferma sostanzialmente che sostituire delle variabili con altre variabili in una formula non ne cambia il significato.

Lemma (di sostituzione): Siano t un termine e φ una formula (su A). Siano inoltre $\mathcal{A} = (D, I)$ un modello (su A), e un assegnamento (su $\mathcal{A}$) e $d \in D$.

- Se la variabile y non occorre in t, allora

$$[\![t]\!]_{\mathcal{A}}^{e[d/x]} = [\![t[y/x]]\!]_{\mathcal{A}}^{e[d/y]}$$

- Se y non occorre in φ, allora

$$(\mathcal{A}, e[d/x]) \models \varphi \iff (\mathcal{A}, e[d/y]) \models \varphi[y/x]$$

La dimostrazione, che qui non viene mostrata, procede per induzione strutturale.

Osservazione: Se y è una variabile che non occorre in φ, allora

$$\begin{aligned} \forall x \varphi &\equiv \forall y(\varphi[y/x]) \\ \exists x \varphi &\equiv \exists y(\varphi[y/x]) \end{aligned}$$

quindi è sempre possibile rinominare una variabile legata sostituendola con una nuova, senza modificare il significato della formula.