Azzolini Riccardo 2018-10-02

Relazioni

1 Relazione

Una **relazione** R tra due insiemi A e B è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$.

$$R \subseteq A \times B$$

1.1 Esempio

$$A = \{1, 2\}$$
$$B = \{a, b, c\}$$

$$R = \{(1, a), (1, b), (2, c)\}$$

1.2 Numero di relazioni esistenti

Siccome una relazione tra due insiemi A e B è un sottoinsieme di $A \times B$, l'insieme di tutte le possibili relazioni tra A e B è $\mathcal{P}(A \times B)$.

Il numero di relazioni esistenti tra A e B è quindi:

$$|\mathcal{P}(A \times B)| = 2^{|A| \cdot |B|}$$

2 Notazioni

2.1 Notazione infissa

Se $R \subseteq A \times B$ è una relazione tra A e B, per indicare che $(a, b) \in R$ si può scrivere aRb. Allo stesso modo, per indicare che $(a, b) \notin R$ si può scrivere $a \not R b$.

2.2 Matrice di adiacenza

Se A e B sono insiemi finiti, una relazione $R \subseteq A \times B$ può essere rappresentata da una tabella a doppia entrata con

- le righe corrispondenti agli elementi di A,
- le colonne corrispondenti agli elementi di B,
- un segno nelle celle corrispondenti alle coppie che appartengono alla relazione.

Questa tabella si chiama **matrice di adiacenza** della relazione.

2.2.1 Esempio

$$A = \{1, 2\}$$
$$B = \{a, b, c\}$$
$$R = \{(1, a), (1, b), (2, c)\}$$

	a	b	c
1	X	X	
2			X

3 Relazione inversa

Se R è una relazione tra A e B, la sua **relazione inversa** R^{-1} è una relazione tra B e A data da

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$$

$$R^{-1} \subseteq B \times A$$

3.1 Esempio

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{a, b, c, d\}$$

$$R = \{(1, a), (2, a), (3, c), (2, d)\}$$
$$R^{-1} = \{(a, 1), (a, 2), (c, 3), (d, 2)\}$$

R	a	b	c	d
1	X			
2	X			X
3			X	

R^{-1}	1	2	3
a	X	X	
b			
c			X
d		X	

4 Relazione binaria

Una **relazione binaria** R su (o di) A è un sottoinsieme di $A \times A$.

$$R \subseteq A \times A$$

Esempio: $\leq$ è una relazione binaria su $\mathbb{N}$.

Se R è una relazione binaria su A, allora lo è anche la sua inversa R^{-1}.

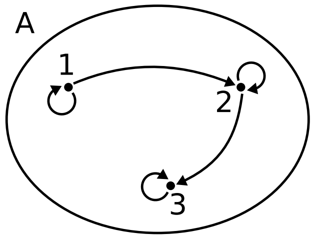
4.1 Notazione: diagramma di Venn

Una relazione binaria R su A può essere rappresentata aggiungendo al diagramma di Venn di A delle frecce che uniscono gli elementi in relazione tra di loro.

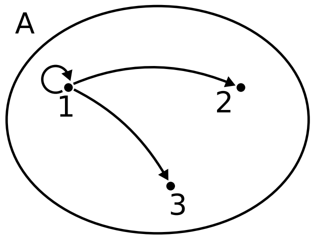
4.1.1 Esempio

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)\}$$



$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\}$$



5 Relazione riflessiva

Una relazione binaria R su A è **riflessiva** se ogni elemento di A è in relazione con sé stesso:

$$\forall x \in A, xRx$$

$$\forall x \in A, (x, x) \in R$$

Non è riflessiva se esiste un $x \in A$ tale che $x \not R x$.

5.1 Nelle rappresentazioni

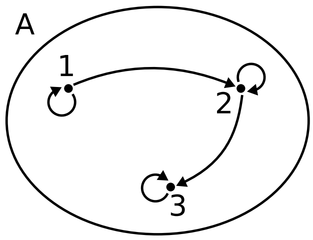
- Nella matrice di adiacenza, devono essere segnate tutte le caselle sulla diagonale che va da *in alto a sinistra* a *in basso a destra* (dato che esse corrispondono alle coppie con prima e seconda componente uguali).
- Nel diagramma di Venn, ogni elemento deve essere collegato a sé stesso.

5.2 Esempio

$$A = \{1, 2, 3\}$$

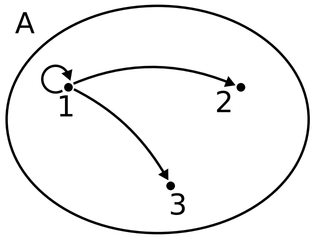
$$R = \{(\mathbf{1}, \mathbf{1}), (\mathbf{2}, \mathbf{2}), (\mathbf{3}, \mathbf{3}), (1, 2), (2, 3)\} \text{ è riflessiva}$$

R	1	2	3
1	**X**	X	
2		**X**	X
3			**X**



$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3)\} \text{ non è riflessiva}$$

S	1	2	3
1	X	X	X
2		—	
3			—



6 Relazione simmetrica

Una relazione binaria R su A è **simmetrica** se per ogni $x, y \in A$, se x è in relazione con y allora y è in relazione con x:

$$\forall x, y \in A, xRy \implies yRx$$

Non è simmetrica se esistono $x, y \in A$ tali che xRy ma $y \not{R} x$.

6.1 Nelle rappresentazioni

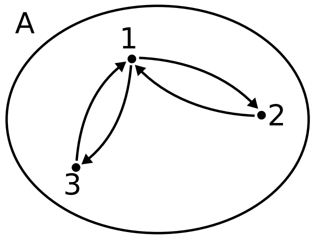
- Nella matrice di adiacenza, le caselle segnate devono essere simmetriche rispetto alla diagonale che va da *in alto a sinistra* a *in basso a destra*.
- Nel diagramma di Venn, se tra due elementi c'è una freccia in una direzione (es. da a a b), allora ce ne deve essere anche una nella direzione opposta (da b ad a).

6.2 Esempio

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1)\} \text{ è simmetrica}$$

R	1	2	3
1		X	X
2	X		
3	X		



$$S = R \cup \{(2,3)\} = \{(1,2),(1,3),(2,1),(3,1),(2,3)\} \text{ non è simmetrica}$$

S	1	2	3
1		X	X
2	X		**X**
3	X