Azzolini Riccardo 2018-11-27

Sottospazi vettoriali e basi

1 Sottospazio vettoriale

Se V è uno spazio vettoriale e $U \subseteq V$, U è un **sottospazio vettoriale** di V se:

- per ogni $u_1, u_2 \in U$ si ha $u_1 + u_2 \in U$
- per ogni $r \in \mathbb{R}$ e $u \in U$ si ha $r \cdot u \in U$

1.1 Sottospazi banali

Se V è uno spazio vettoriale, esso è un sottospazio di se stesso.

Se $0_V \in V$ è l'elemento neutro di $(V, +)$, chiamato **vettore zero** o **vettore nullo**, $\{0_V\}$ è un sottospazio di V:

$$0_V + 0_V = 0_V$$
$$r \cdot 0_V = 0_V$$

1.2 Esempi

$$U = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$u_1 = (x_1, 0) \in U \qquad u_2 = (x_2, 0) \in U$$
$$u_1 + u_2 = (x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0) \in U$$
$$r \cdot u_1 = r \cdot (x_1, 0) = (rx_1, 0) \in U$$

Quindi U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

$$V = \{(x, 1) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$v_1 = (x_1, 1) \in V \qquad v_2 = (x_2, 1) \in V$$

$$v_1 + v_2 = (x_1, 1) + (x_2, 1) = (x_1 + x_2, 2) \notin V$$

Quindi V *non* è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

1.3 Sottospazi di $\mathbb{R}^n$

I sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono:

- $\{(0, 0)\}$
- $\mathbb{R}^2$
- insiemi di punti che formano rette passanti per l'origine degli assi

In $\mathbb{R}^3$ si hanno invece:

- $\{(0, 0, 0)\}$
- $\mathbb{R}^3$
- rette passanti per l'origine
- piani passanti per l'origine

Quando $n \geq 4$, in $\mathbb{R}^n$ si possono avere, oltre a sottospazi banali, rette e piani, anche *iperpiani* (da 3 a $n - 1$ dimensioni) passanti per l'origine.

Come caso limite, i sottospazi di $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ (che corrisponde a una retta) sono solo quelli banali: $\{0\}$ e $\mathbb{R}$.

2 Spazio generato

Se $S \subseteq V$ è un insieme di vettori, lo **spazio generato** da S è l'insieme $<S>$ di tutte le combinazioni lineari degli elementi di S:

$$<S> = \{r_1 s_1 + \cdots + r_n s_n \mid r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R},\ s_1, \ldots, s_n \in S\}$$

Si dice che S è un **insieme di generatori** di V. Inoltre, $<S>$ è un sottospazio vettoriale di V, e per questo si dice anche **sottospazio generato**.

2.1 Esempio

$$V = \mathbb{R}^3 \qquad S = \{(1,0,0),(0,1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\begin{aligned} <S> &= \{r_1(1,0,0) + r_2(0,1,0) \mid r_1, r_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(r_1,0,0) + (0,r_2,0) \mid r_1, r_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(r_1,r_2,0) \mid r_1, r_2 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Quindi $<S> \neq \mathbb{R}^3$ (cioè $<S> \subset \mathbb{R}^3$). Ad esempio:

$$(1,2,0) \in <S> \qquad (1,0,1) \notin <S>$$

3 Base

Una **base** per uno spazio vettoriale V è un insieme B di vettori linearmente indipendenti, tale che $<B> = V$.

Ogni vettore di V si può scrivere in modo *unico* come combinazione lineare degli elementi di B.

3.1 Esempi

$$U = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^2$.

Un esempio di base per U è $B = \{(1,0)\}$:

$$(x,0) \in U \qquad (x,0) = x \cdot (1,0) \in <B>$$

quindi $<B> = U$.

Un esempio di base di $\mathbb{R}^2$ è invece $B = \{(1,0),(0,1)\}$:

- $(x,y) = x \cdot (1,0) + y \cdot (0,1)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$

- B è linearmente indipendente, dato che nella matrice formata dai vettori tutte e due le righe sono linearmente indipendenti:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0 \implies \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

4 Dimensione di uno spazio vettoriale

Uno spazio vettoriale V può avere più basi, ma tutte con la stessa cardinalità. La cardinalità di una base qualsiasi di V si chiama **dimensione** di V e si indica con $\dim V$.

Se V è uno spazio vettoriale di dimensione n, ogni insieme di n vettori linearmente indipendenti appartenenti a V forma una base di V.

La dimensione di uno spazio vettoriale del tipo $\mathbb{R}^n$ è n.

4.1 Esempio

$$B = \{(1, 0, 1), (0, 1, 2), (1, 0, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Per controllare se B è una base di $\mathbb{R}^3$, siccome $\dim \mathbb{R}^3 = 3 = |B|$, è sufficiente verificare se è linearmente indipendente:

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

quindi B è una base di $\mathbb{R}^3$.

5 Base canonica di $\mathbb{R}^n$

In $\mathbb{R}^n$, si dice **base canonica** la base costituita da vettori aventi una componente uguale a 1 e tutte le altre uguali a 0.

5.1 Esempi

La base canonica di $\mathbb{R}^2$ è:

$$B = \{(1,0),(0,1)\}$$

La base canonica di $\mathbb{R}^3$ è invece:

$$B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

6 Soluzioni dei sistemi omogenei

Se S è un sistema omogeneo di m equazioni in n incognite, l'insieme $\mathrm{Sol}(S)$ delle sue soluzioni è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

Inoltre, se r è il rango della matrice dei coefficienti di S:

$$\dim \mathrm{Sol}(S) = n - r$$

6.1 Esempio con infinite soluzioni

$$\begin{cases} x \quad + \quad z = 0 \\ \quad y + 2z = 0 \\ 3x \quad + 3z = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad R_3 \to R_3 - 3R_1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rg} A = 2$, quindi il sistema ha $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni.

$$\begin{cases} x \quad + \quad z = 0 \\ \quad y + 2z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -z \\ y = -2z \end{cases}$$
$$\mathrm{Sol}(S) = \{(-z,-2z,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$

$\mathrm{Sol}(S)$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$(-z_1,-2z_1,z_1) + (-z_2,-2z_2,z_2) = (-(z_1+z_2),-2(z_1+z_2),z_1+z_2) \in \mathrm{Sol}(S)$$

$$r \cdot (-z, -2z, z) = (-rz, -2rz, rz) \in \mathrm{Sol}(S)$$

$$\dim \mathrm{Sol}(S) = 1$$

Una base è $\{(-1, -2, 1)\}$.

6.2 Esempio con una sola soluzione

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3x + 2y \qquad = 0 \\ x + \ \ y + z = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Siccome $\mathrm{rg}\, A = 3$, il sistema ha $\infty^0 = 1$ soluzione:

$$\mathrm{Sol}(S) = \{(0, 0, 0)\} \qquad \dim \mathrm{Sol}(S) = 0$$