Azzolini Riccardo 2018-12-11

Autovettori e autovalori

1 Applicazione lineare diagonalizzabile

Un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è **diagonalizzabile** se esiste una base $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ tale che $f(b_i) = \lambda_i \cdot b_i$, con $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

In questo caso, la matrice associata a f rispetto a B è diagonale.

Ogni vettore $u \in \mathbb{R}^n$ si può esprimere come combinazione lineare di B, con coefficienti $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$:

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$$

$f(u)$ è quindi una combinazione lineare di B tramite i coefficienti $a_i \cdot \lambda_i$, cioè si ottiene moltiplicando ogni coefficiente a_i di u per λ_i:

$$f(u) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot f(b_i) = \sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot \lambda_i) \cdot b_i$$

1.1 Esempi

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad f(x, y) = (2x, 3y)$$

La matrice associata a f in base canonica è diagonale:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f(1, 0) = (2, 0) = 2(1, 0) + 0(0, 1)$$
$$f(0, 1) = (0, 3) = 0(1, 0) + 3(0, 1)$$

$$(1, 1) = 1(1, 0) + 1(0, 1)$$

$$f(1,1) = 1f(1,0) + 1f(0,1) = 1(2,0) + 1(0,3) = (2,3)$$

$$g : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x+y, 2y) \in \mathbb{R}^2$$

In base canonica, la matrice associata non è diagonale:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Nella base $B = \{(1,0),(1,1)\}$, invece, la matrice è diagonale:

$$g(1,0) = (1,0) = 1(1,0) + 0(1,1)$$
$$g(1,1) = (2,2) = 0(1,0) + 2(1,1)$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(-1,1) = -2(1,0) + 1(1,1)$$
$$g(-1,1) = -2f(1,0) + 1f(1,1) = -2(1,0) + 1(2,2) = (0,2)$$

Quindi g è diagonalizzabile.

2 Autovettore e autovalore

Data un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, un vettore $u \in \mathbb{R}^n$ è un **autovettore** di f se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $f(u) = \lambda \cdot u$. λ si chiama **autovalore** di u per f.

In $\mathbb{R}^n$, un'applicazione lineare può avere al massimo n autovalori distinti.

2.1 Esempio

$$f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x+y, 2y) \in \mathbb{R}^2$$

- $f(1,0) = (1,0)$, quindi $(1,0)$ è un autovettore di f relativamente all'autovalore $\lambda = 1$.
- $f(1,1) = (2,2) = 2(1,1)$, quindi $(1,1)$ è un autovettore di f relativamente all'autovalore $\lambda = 2$.
- $f(0,1) = (1,2)$, quindi $(0,1)$ *non* è un autovettore di f.

3 Trovare gli autovalori: polinomio caratteristico

Data un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e la matrice $A \in M_n$ associata a f (in una base qualsiasi), $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di f se il sistema omogeneo

$$\begin{gathered} f(u) = \lambda u \\ f(u) - \lambda u = 0 \\ Au - \lambda u = 0 \\ Au - \lambda I_n u = 0 \\ (A - \lambda I_n)u = 0 \end{gathered}$$

ha soluzioni non banali, cioè se $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

$\det(A - \lambda I_n)$ è un polinomio nella variabile λ chiamato **polinomio caratteristico** di f, e le sue **radici** (soluzioni dell'equazione ottenuta ponendo il polinomio uguale a 0,) sono gli autovalori di f.

In altre parole, gli autovalori di f sono tutte le soluzioni dell'equazione $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

3.1 Esempio

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + y, 2y) \in \mathbb{R}^2$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 0$$

Il polinomio caratteristico di f è $(1 - \lambda)(2 - \lambda)$, quindi gli autovalori sono:

$$(1-\lambda)(2-\lambda) = 0 \implies \lambda_1 = 1, \;\; \lambda_2 = 2$$

4 Autospazio

L'insieme V_λ di tutti gli autovettori relativi a un autovalore λ di $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ e si chiama **autospazio** di f relativo a λ:

$$V_\lambda = \{u \in \mathbb{R}^n \mid f(u) = \lambda u\}$$

Esso corrisponde all'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo $(A - \lambda I_n)u = 0$, cioè quello dato dalla matrice $A - \lambda I_n$.

In particolare, se $\lambda = 0$ è un autovalore di f, il suo autospazio è $\operatorname{Ker} f$.

4.1 Esempio

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + y, 2y) \in \mathbb{R}^2$$
$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = 2$$

Per $\lambda_1 = 1$:

$$f(u) = \lambda_1 u \implies f(u) = u$$

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x, y) \mid f(x, y) = (x, y)\} \\ &= \{(x, y) \mid (x + y, 2y) = (x, y)\} \\ &= \{(x, y) \mid x + y = x, \;\; 2y = y\} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x + y = x \\ 2y = y \end{cases} \implies \begin{cases} y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

La matrice associata al sistema è:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A - \lambda_1 I_2$$

L'autospazio relativo a $\lambda_1 = 1$ è quindi:

$$V_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Tutti i vettori del tipo $(x, 0)$ sono infatti autovettori relativi a $\lambda_1 = 1$: $f(x, 0) = (x, 0)$ per ogni x.

Per $\lambda_2 = 2$:

$$A - \lambda_2 I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi V_2 è l'insieme delle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \implies y = x$$

$$V_2 = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Per esempio:

$$(3, 3) \in V_2 \qquad f(3, 3) = (6, 6) = 2(3, 3)$$

4.1.1 Dimensioni e basi degli autospazi

- $V_1 = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ha dimensione 1, e una sua base è $\{(1, 0)\}$.
- $V_2 = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ha dimensione 1, e $\{(1, 1)\}$ è una sua base.