Azzolini Riccardo 2019-02-27

Funzioni

1 Funzioni pari e dispari

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione con dominio simmetrico rispetto all'origine, cioè tale che $\forall x \in X$, anche $-x \in X$.

- Se $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in X$, f è **pari**.
- Se $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in X$, f è **dispari**.

Il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse y, mentre il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine.

1.1 Esempi

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^4 - 3x^2 + 1 \\ f(-x) &= 2(-x)^4 - 3(-x)^2 + 1 \\ &= 2x^4 - 3x^2 + 1 \\ &= f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \implies \text{pari} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^7 - 2x^3 + x \\ f(-x) &= (-x)^7 - 2(-x)^3 - x \\ &= -x^7 + 2x^3 - x \\ &= -(x^7 - 2x^3 + x) \\ &= -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \implies \text{dispari} \end{aligned}$$

In generale, un polinomio è:

- pari se tutti i suoi termini hanno esponenti pari (ci può anche essere un termine noto, che corrisponde a x^0);

- dispari se tutti i suoi termini hanno esponenti dispari.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \\ f(-x) &= \sin(-x) = -\sin x \implies \text{dispari} \end{aligned}$$

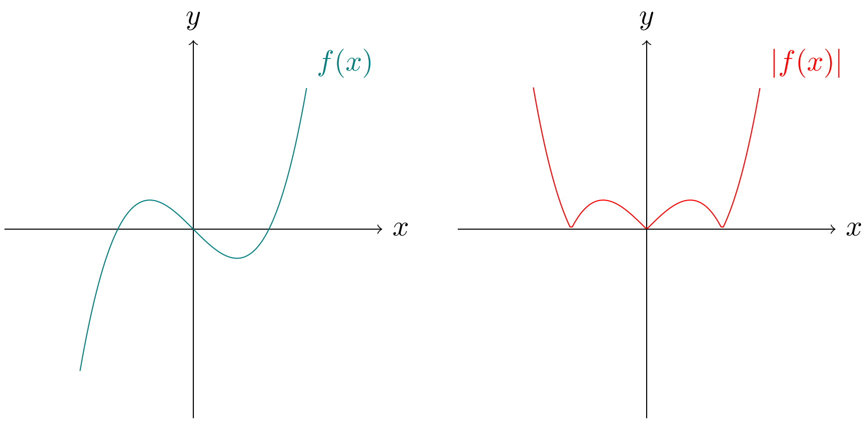
$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x \\ f(-x) &= \cos(-x) = \cos x \implies \text{pari} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \\ f(-x) &= \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} \\ &= \frac{-\sin x}{\cos x} \\ &= -\operatorname{tg} x \implies \text{dispari} \end{aligned}$$

2 Grafico del modulo

Il grafico di $|f(x)|$ si ottiene specchiando rispetto all'asse x le parti del grafico di $f(x)$ nelle quali la funzione ha valore negativo.

Ad esempio:

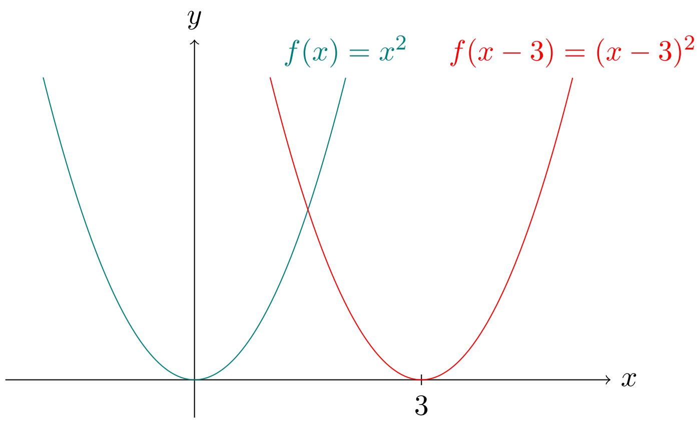


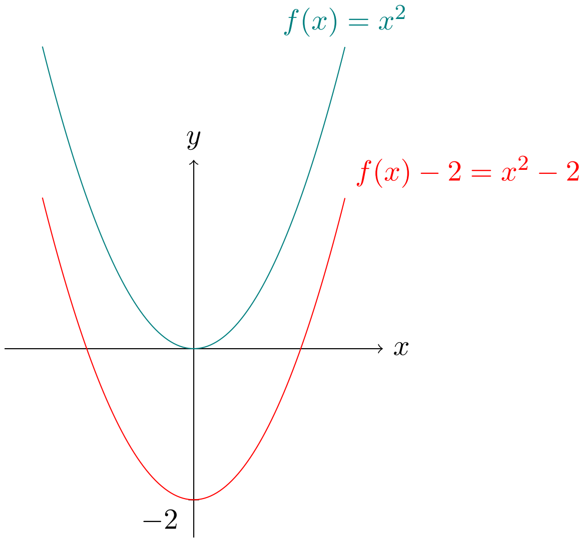
3 Traslazioni di un grafico

Dato il grafico di una funzione $y = f(x)$, è possibile ricavare:

- il grafico di $y = f(x + a)$, con $a \in \mathbb{R}$, mediante una *traslazione orizzontale* di $|a|$ unità
  - verso sinistra se $a > 0$
  - verso destra se $a < 0$
- il grafico di $y = f(x) + a$, con $a \in \mathbb{R}$, mediante una *traslazione verticale* di $|a|$ unità
  - verso l'alto se $a > 0$
  - verso il basso se $a < 0$

3.1 Esempi





4 Parte positiva e parte negativa

Sia f una funzione.

La funzione **parte positiva** di f è

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

mentre la funzione **parte negativa** di f è

$$f_-(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

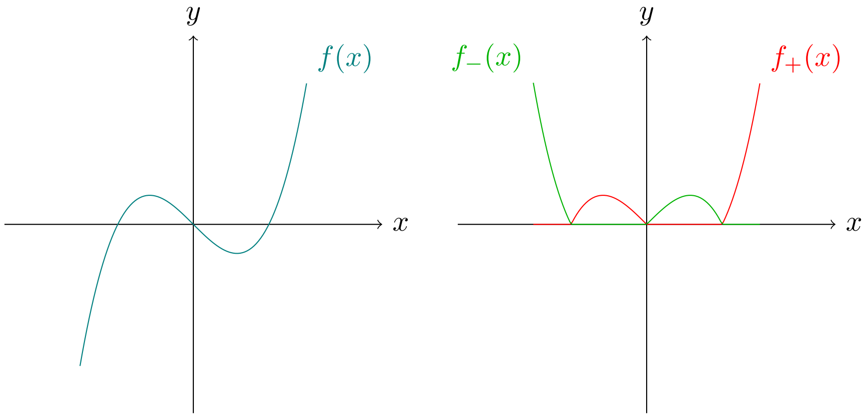
Nota: Nonostante il nome, la funzione parte negativa assume sempre valori ≥ 0 ("negativa" si riferisce al segno della funzione f originale).

Su queste due funzioni valgono le proprietà

$$f_+(x) - f_-(x) = f(x)$$
$$f_+(x) + f_-(x) = |f(x)|$$

quindi una funzione qualsiasi può sempre essere scritta come la differenza di due funzioni ≥ 0.

4.1 Esempio



5 Funzione periodica

Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ si dice **periodica** se $\exists P \in \mathbb{R}$ tale che, $\forall x \in X$, $x + P \in X$ e $f(x + P) = f(x)$. Il più piccolo valore P che soddisfa l'uguaglianza si chiama **periodo** di f.