Azzolini Riccardo 2019-03-04

Limiti di funzioni

1 Definizione intuitiva di limite

Intuitivamente,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

significa che, quando x si avvicina a x_0, il valore di $f(x)$ si avvicina a l (dove x_0 e l possono essere numeri reali o $\pm\infty$).

2 Distanza

Una funzione

$$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

è una **distanza** se:

- $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \iff x = y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$;
- $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (*proprietà simmetrica*);
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ (*disuguaglianza triangolare*).

Una funzione che soddisfa queste proprietà è la **distanza euclidea**:

$$d(x, y) = |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

3 $\mathbb{R}$ ampliato

$\mathbb{R}$ **ampliato** è l'insieme:

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$$

Non è un insieme numerico, perché $\pm\infty$ non sono numeri.

4 Intorno

- Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Un **intorno** di x_0 è un insieme del tipo

$$\begin{aligned} U_\varepsilon &= \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\} \\ &= (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \end{aligned}$$

  con $\varepsilon > 0$. Si può anche scrivere $U_\varepsilon(x_0)$ per specificare esplicitamente il punto a cui l'intorno si riferisce.

- Un intorno di $+\infty$ è un insieme del tipo

$$U_a = (a, +\infty]$$

  con $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{+\infty\}$.

- Un intorno di $-\infty$ è un insieme del tipo

$$U_b = [-\infty, b)$$

  con $b \in \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty\}$.

5 Punto di accumulazione

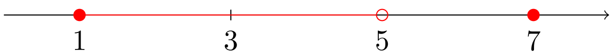
Sia $D \subseteq \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^*$ (che quindi può anche non appartenere a D) si dice **punto di accumulazione** per D se ogni intorno U_ε di x_0 contiene almeno un punto di D diverso da x_0:

$$(U_\varepsilon \setminus \{x_0\}) \cap D \neq \varnothing$$

Se $x_0 \in D$, ma non è un punto di accumulazione, si dice **punto isolato**.

5.1 Esempio

$$D = [1, 5) \cup \{7\}$$



- $x_0 = 3$ è un punto di accumulazione per D perché ogni suo intorno interseca D.
- $x_0 = 5$, pur non appartenendo a D, è un punto di accumulazione perché ogni suo intorno interseca D (a sinistra).
- $x_0 = 7 \in D$ è un punto isolato, cioè non è un punto di accumulazione, perché alcuni suoi intorni, come per esempio $(6, 8)$, non intersecano D (se non nel punto x_0 stesso, che però per la definizione di punto di accumulazione non conta).

6 Punto interno, esterno e di frontiera

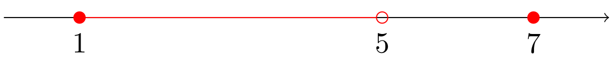
Sia $D \subseteq \mathbb{R}$.

- Un punto $x_0 \in D$ si dice **punto interno** a D se $\exists U_\varepsilon(x_0)$ tale che $U_\varepsilon(x_0) \subset D$.
- Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice **punto esterno** a D se è un punto interno di $\mathbb{R} \setminus D$.
- Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è un **punto di frontiera** per D se non è né interno né esterno a D.

Osservazione: Un punto interno a D è sempre un punto di accumulazione per D, mentre un punto esterno non lo è mai.

6.1 Esempio

$$D = [1, 5) \cup \{7\}$$



- Tutti i punti in $(1, 5)$ sono interni a D, perché hanno degli intorni che sono completamente contenuti in D.
- Tutti i punti in $(-\infty, 1) \cup (5, 7) \cup (7, +\infty)$ sono esterni a D, perché hanno degli intorni che sono "completamente fuori" da D, cioè completamente contenuti dal complementare $\mathbb{R} \setminus D$.

- $\{1, 5, 7\}$ sono punti di frontiera, perché tutti i loro intorni intersecano D (quindi non sono esterni) ma non sono completamente contenuti da esso (quindi non sono interni).

7 Punto di minimo e massimo locale

Sia $f : D \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in D$. x_0 si dice **punto di massimo locale** o **relativo** (**minimo locale** o **relativo**) se $\exists U(x_0)$ intorno di x_0 tale che, $\forall x \in U(x_0)$, $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$).