Azzolini Riccardo 2020-03-17

Semantica della logica proposizionale classica

1 Valori di verità

Come già detto, la **logica classica** prevede due possibili **valori di verità**: **VERO** (indicato anche con V o 1) e **FALSO** (F, 0).

Le variabili proposizionali, come tutte le variabili, assumono valori in un determinato dominio, che è appunto quello costituito dai valori vero e falso. In generale, non è compito della logica proposizionale stabilire quale sia il valore di verità di una variabile proposizionale (cioè di una formula atomica): esso viene invece stabilito dal "mondo" che si sta modellando.

Il compito della logica proposizionale è invece stabilire il valore di verità di una formula per *ogni possibile assegnamento* dei valori di verità alle variabili proposizionali.

1.1 Esempio

Si considerano le due variabili proposizionali p e q, e la formula

$$A = (p \land \neg q)$$

Essa è vera se entrambe le formule p e $\neg q$ sono vere, altrimenti è falsa.

La logica proposizionale studia il valore della formula A al variare dei valori di verità di p e q, considerando tutti i quattro casi possibili:

p VERO	q VERO
p VERO	q FALSO
p FALSO	q VERO
p FALSO	q FALSO

In generale, quando si usa la logica proposizionale per modellare una situazione reale, un "frammento di mondo", non è detto che tutti i possibili valori di verità delle variabili proposizionali che compaiono nella formula siano compatibili. Ad esempio, se si suppone che le variabili p e q corrispondano alle asserzioni

$$p \equiv \text{“la mela che ho in mano è verde”}$$
$$q \equiv \text{“la mela che ho in mano è rossa”}$$

è evidente che, in una situazione reale, non è possibile che p e q siano contemporaneamente vere: se p è vera, allora la mela è verde, quindi non può essere anche rossa, cioè q è falsa.

Questo esempio “sfrutta” il fatto che, nel linguaggio naturale, si tendono a identificare sintassi e semantica: quando si leggono le due asserzioni riportate sopra, vi si assegna “automaticamente” un significato, e, se queste vengono poi inserite in una formula, intuitivamente si assegna un significato anche a essa. Infatti, se si riscrive la formula $(p \wedge \neg q)$ con le asserzioni e i connettivi in linguaggio naturale,

“la mela che ho in mano è verde” e (non (“la mela che ho in mano è rossa”))

si ottiene una frase alla quale si dà immediatamente un significato sulla base del mondo reale.

Invece, la matematica distingue in modo rigido la sintassi dalla semantica, assegnando un significato alle frasi in modo esplicito, tramite un qualche meccanismo formale, un significato, che è nettamente separato da come la frase sia scritta (ovvero dalla sintassi).

2 Valutazioni e interpretazioni

Per attribuire un significato a una formula sono necessari due passi:

1. assegnare dei valore di verità alle variabili proposizionali, mediante il concetto di *valutazione*;
2. definire l'*interpretazione* (valore di verità) *di una formula* a partire da una specifica valutazione delle variabili.

2.1 Variabili

Definizione: Una valutazione (o interpretazione) delle variabili proposizionali è una qualsiasi funzione che associa a ciascuna variabile proposizionale un valore di verità:

$$v : VAR \to \{0, 1\}$$

Ad esempio, se si considerano le variabili proposizionali $p, q, r, \ldots$, una valutazione v viene definita specificando i valori di $v(p), v(q), v(r), \ldots$:

$$v(p) = 1 \quad v(q) = 0 \quad v(r) = 0 \quad \ldots$$

Osservazione: Il dominio di questa funzione, l'insieme VAR delle variabili proposizionali, è potenzialmente infinito.

2.2 Formule

Definizione: Una valutazione $v : VAR \to \{0, 1\}$ si **estende** a una valutazione (o interpretazione)

$$v^* : FORM \to \{0, 1\}$$

delle formule su VAR nel seguente modo:

- Casi base:
  - $v^*(\bot) = 0$;
  - se $A \in VAR$, allora $v^*(A) = v(A)$.
- Casi induttivi, cioè $A = \neg B$ e $A = B * C$, $* \in \{\wedge, \vee, \to\}$:
  - $v^*(\neg B) = 1$ sse $v^*(B) = 0$;
  - $v^*(B \wedge C) = 1$ sse $v^*(B) = 1$ *e* $v^*(C) = 1$;
  - $v^*(B \vee C) = 1$ sse $v^*(B) = 1$ *oppure* $v^*(C) = 1$;
  - $v^*(B \to C) = 1$ sse $v^*(B) = 0$ *oppure* $v^*(C) = 1$.

Nota: L'abbreviazione "sse" significa "se e solo se" (analogamente, in inglese, si usa "iff" per abbreviare "if and only if"). Inoltre, sempre per semplificare la notazione, in seguito si scriverà semplicemente v (invece che v^*) anche per indicare l'estensione della valutazione alle formule.

Osservazione: v^* è una funzione con dominio infinito (anche perché già solo le variabili proposizionali, che sono potenzialmente infinite, costituiscono "da sole" delle formule: $VAR \subset FORM$).

2.2.1 Significato della definizione

È utile ragionare più nel dettaglio sul significato delle clausole definitorie del valore di verità delle formule composte.

"Se e solo se" esprime una *condizione necessaria e sufficiente*, e può quindi essere spezzato in due parti.

- La clausola relativa alla negazione,

  $$v(\neg B) = 1 \text{ sse } v(B) = 0$$

  si suddivide in:

  - condizione sufficiente: $v(\neg B) = 1$ se $v(B) = 0$, cioè $v(B) = 0 \implies v(\neg B) = 1$;[1]
  - condizione necessaria: $v(\neg B) = 1$ solo se $v(B) = 0$, cioè $v(\neg B) = 1 \implies v(B) = 0$, che può essere riscritta anche nella forma *contronominale*, $v(B) \neq 0 \implies v(\neg B) \neq 1$, e, siccome i valori di verità sono solo 0 e 1, ciò equivale a $v(B) = 1 \implies v(\neg B) = 0$.

- La clausola dell'implicazione,

  $$v(B \to C) = 1 \text{ sse } v(B) = 0 \text{ oppure } v(C) = 1$$

  può essere suddivisa in:

  - condizione sufficiente:

    $$(v(B) = 0 \text{ oppure } v(C) = 1) \implies v(B \to C) = 1$$

  - condizione necessaria:

    $$\begin{aligned} v(B \to C) = 1 &\implies (v(B) = 0 \text{ oppure } v(C) = 1) \\ \text{non vale } (v(B) = 0 \text{ oppure } v(C) = 1) &\implies \text{non vale } (v(B \to C) = 1) \\ (v(B) = 1 \text{ e } v(C) = 0) &\implies v(B \to C) = 0 \end{aligned}$$

- Allo stesso modo, si suddivide anche la clausola riguardante la congiunzione:

  $$v(B \wedge C) = 1 \text{ sse } v(B) = 1 \text{ e } v(C) = 1$$

[1] Il simbolo $\implies$, che significa "implica", è usato per distinguere questo concetto di implicazione, appartenente al meta-linguaggio (in pratica, il linguaggio naturale) che si sta usando per descrivere il linguaggio formale della logica proposizionale, dall'implicazione della logica proposizionale stessa (il connettivo $\to$).

- condizione sufficiente:

$$(v(B) = 1 \text{ e } v(C) = 1) \implies v(B \wedge C) = 1$$

- condizione necessaria:

$$v(B \wedge C) = 1 \implies (v(B) = 1 \text{ e } v(C) = 1)$$
$$(v(B) = 0 \text{ oppure } v(C) = 0) \implies v(B \wedge C) = 0$$

- Infine, per la disgiunzione:

$$v(B \vee C) = 1 \text{ sse } v(B) = 1 \text{ oppure } v(C) = 1$$

- condizione sufficiente:

$$(v(B) = 1 \text{ oppure } v(C) = 1) \implies v(B \vee C) = 1$$

- condizione necessaria:

$$v(B \vee C) = 1 \implies (v(B) = 1 \text{ oppure } v(C) = 1)$$
$$(v(B) = 0 \text{ e } v(C) = 0) \implies v(B \vee C) = 0$$

3 Tavole di verità per i connettivi

Le valutazioni dei connettivi possono essere riassunte con delle tabelle, nelle quali si riportano le interpretazioni delle formule al variare delle valutazioni delle sottoformule:

- $v(\neg B) = 1$ sse $v(B) = 0$:

B	$\neg B$
1	0
0	1

- $v(B \wedge C) = 1$ sse $v(B) = 1$ *e* $v(C) = 1$:

B	C	$B \wedge C$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

- $v(B \vee C) = 1$ sse $v(B) = 1$ *oppure* $v(C) = 1$:

B	C	$B \lor C$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

- $v(B \to C) = 1$ sse $v(B) = 0$ *oppure* $v(C) = 1$:

B	C	$B \to C$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Da queste tabelle, si osserva che i valori di verità dei connettivi possono anche essere espressi tramite le seguenti equazioni:

$$
\begin{aligned}
v(\neg B) &= 1 - v(B) \\
v(B \land C) &= \min\{v(B), v(C)\} \\
v(B \lor C) &= \max\{v(B), v(C)\} \\
v(B \to C) &= \max\{1 - v(B), v(C)\}
\end{aligned}
$$

4 Connettivi come operazioni sui valori di verità

Le tabelle di verità appena introdotte consentono di interpretare i connettivi come operatori sui valori di verità.

Ad esempio, data l'espressione $0 \land 1$, il suo valore può essere determinato facendo riferimento alla riga corrispondente della tabella di verità del connettivo $\land$: il risultato è quindi 0.

Quest'interpretazione è un po' informale ($0 \land 1$ *non è* una formula del linguaggio della logica proposizionale, in quanto 0 e 1 non sono simboli di tale linguaggio), ma risulta utile per "fare i conti".

4.1 Esempi

- Data la formula
$$A = (p \lor \neg q) \to (q \land (q \to p))$$
determinare $v(A)$ in dipendenza della valutazione
$$v(p) = 1 \quad v(q) = 0$$

Sfruttando l'interpretazione dei connettivi come operatori, è possibile sostituire i valori 0 e 1 al posto delle variabili proposizionali, e poi effettuare i calcoli seguendo le tavole di verità:

$$\begin{aligned} v(A) &= (1 \lor \neg 0) \to (0 \land (0 \to 1)) \\ &= (1 \lor 1) \to (0 \land 1) \\ &= 1 \to 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Data
$$A = (p \land \neg q) \lor (\neg p \land q)$$
determinare $v(A)$ in dipendenza della valutazione
$$v(p) = 1 \quad v(q) = 0$$

$$\begin{aligned} v(A) &= (1 \land \neg 0) \lor (\neg 1 \land 0) \\ &= (1 \land 1) \lor (0 \land 0) \\ &= 1 \lor 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

5 Considerazioni sull'implicazione

Dalla tavola di verità dell'implicazione,

A	B	$A \to B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

si osserva che essa è falsa solo quando *l'antecedente* (A) *è vero e il conseguente* (B) *è falso*.

Ad esempio, l'asserzione "se piove allora apro l'ombrello", cioè "piove implica apro l'ombrello", è falsa quando *piove ma io non apro l'ombrello*. In tutti gli altri casi, non ci sono motivi per dire che la formula sia falsa, quindi risulta essere vera; in particolare, quando *non piove* la formula *non è falsa*.

Quest'interpretazione dell'implicazione corrisponde alla lettura classica di "se… allora"; essa prende il nome di *implicazione Filoniana* (dal nome del filosofo greco Filone di Megara, che l'ha discussa nel III secolo A.C.) o *implicazione materiale logica*.