Azzolini Riccardo 2020-05-22

Equivalenza logica

1 Equivalenza logica

Definizione: Due formule φ e ψ sono logicamente equivalenti, scritto $\varphi \equiv \psi$, se, per ogni modello $\mathcal{A}$ e per ogni assegnamento e (su $\mathcal{A}$), si ha

$$(\mathcal{A}, e) \models \varphi \iff (\mathcal{A}, e) \models \psi$$

Tutte le equivalenze logiche viste per la logica proposizionale – che riguardano solo il comportamento dei connettivi – valgono anche per la logica del primo ordine. Inoltre, nella logica del primo ordine esistono altre equivalenze logiche notevoli, che riguardano invece il comportamento dei quantificatori. Nel seguito, verranno presentate alcune di queste equivalenze.

2 Riscrittura dei quantificatori

1. $\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$
   ($\forall x\varphi$ non vale se e solo se esiste almeno un elemento del dominio per cui vale $\neg\varphi$)
2. $\neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$
   ($\exists x\varphi$ non vale se e solo se per tutti gli elementi del dominio vale $\neg\varphi$)
3. $\forall x\varphi \equiv \neg\exists x\neg\varphi$
   (ottenuta dalla 1, negando entrambi i lati dell'equivalenza ed eliminando la doppia negazione)
4. $\exists x\varphi \equiv \neg\forall x\neg\varphi$
   (ottenuta analogamente dalla 2)

2.1 Esempio

Si consideri la formula chiusa

$$\forall x\forall y\forall z\underbrace{(R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z))}_{\psi}$$

che esprime la *transitività* di R.

Utilizzando l'equivalenza logica $\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi$, la negazione di questa formula può essere riscritta nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
\neg\forall x\forall y\forall z\psi &= \neg\forall x\forall y\forall z(R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z)) \\
&\equiv \exists x\neg\forall y\forall z(R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z)) \\
&\equiv \exists x\exists y\neg\forall z(R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z)) \\
&\equiv \exists x\exists y\exists z\neg(R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z)) \\
&= \exists x\exists y\exists z\neg\psi
\end{aligned}$$

Per vedere che tale equivalenza è effettivamente verificata, si considera, ad esempio, la struttura $\mathcal{A} = (\{a,b,c\}, I)$, con

$$I(R) = \{(a,a),(a,b),(c,a),(b,c)\}$$

Essa è tale che $\mathcal{A} \not\models \forall x\forall y\forall z\varphi$, ovvero $\mathcal{A} \models \neg\forall x\forall y\forall z\varphi$:

$$(\mathcal{A},[a/x,b/y,c/z]) \not\models \underbrace{R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z)}_{\psi}$$

in quanto $(a,b) \in I(R)$ e $(b,c) \in I(R)$, ma $(a,c) \notin I(R)$. D'altra parte, il fatto che la coppia $(\mathcal{A},[a/x,b/y,c/z])$ non verifichi ψ significa che essa verifica invece $\neg\psi$,

$$(\mathcal{A},[a/x,b/y,c/z]) \models \neg(\underbrace{R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z)}_{\psi})$$

e quindi

$$\mathcal{A} \models \exists x\exists y\exists z\neg(\underbrace{R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z)}_{\psi}) = \exists x\exists y\exists z\neg\psi$$

2.2 Legame tra quantificatori e connettivi

Le equivalenze

$$\neg\forall x\varphi \equiv \exists x\neg\varphi \qquad\qquad \neg\exists x\varphi \equiv \forall x\neg\varphi$$

sono generalizzazioni delle leggi di De Morgan:

$$\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B \qquad\qquad \neg(A \lor B) \equiv \neg A \land \neg B$$

Infatti, si possono considerare

- il quantificatore universale $\forall$ come una *congiunzione generalizzata*;
- il quantificatore esistenziale $\exists$ come una *disgiunzione generalizzata*.

2.2.1 Esempio: quantificatore universale

Data la formula $\varphi = \forall x P(x)$, si consideri un modello $\mathcal{A} = (D, I)$ con un dominio finito (per semplicità) $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$A \models \varphi$ se e solo se, per ogni $d \in D$, si ha $d \in I(P)$, cioè se

$$1 \in I(P) \quad \text{e} \quad 2 \in I(P) \quad \text{e} \quad 3 \in I(P) \quad \text{e} \quad 4 \in I(P) \quad \text{e} \quad 5 \in I(P)$$

ovvero se

$$(\mathcal{A}, [1/x_1, 2/x_2, 3/x_3, 4/x_4, 5/x_5]) \models P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge P(x_3) \wedge P(x_4) \wedge P(x_5)$$

Quindi, nel caso di un dominio finito, si è potuta trasformare una formula quantificata universalmente $\forall x P(x)$ nella congiunzione di un numero finito di istanze di $P(x)$.

Il quantificatore $\forall$ può allora essere interpretato come una congiunzione *generalizzata* perché lo si può applicare anche nel caso di un dominio infinito, quando invece con la congiunzione sarebbe necessario scrivere una formula infinita con un numero infinito di variabili,

$$P(x_1) \wedge \cdots \wedge P(x_n) \wedge \cdots$$

che nel linguaggio della logica del primo ordine non è ammessa.

2.2.2 Esempio: quantificatore esistenziale

Si considerino la formula $\varphi = \exists x P(x)$ e un modello $\mathcal{A} = (D, I)$ con dominio finito $D = \{1, 2, 3\}$.

$\mathcal{A} \models \varphi$ se e solo se esiste $d \in D$ tale che $d \in I(P)$, cioè se

$$1 \in I(P) \quad \text{o} \quad 2 \in I(P) \quad \text{o} \quad 3 \in I(P)$$

che vale quando la formula

$$P(x_1) \vee P(x_2) \vee P(x_3)$$

è soddisfatta dall'assegnamento $[1/x_1, 2/x_2, 3/x_3]$.

3 Congiunzioni e disgiunzioni quantificate

$$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$$
$$\exists x(P(x) \vee Q(x)) \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$$

Non valgono invece le "duali" di queste due (le equivalenze ottenute "scambiando" $\wedge$ e $\vee$):

$$\begin{aligned}\forall x(P(x) \vee Q(x)) &\not\equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \\ \exists x(P(x) \wedge Q(x)) &\not\equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)\end{aligned}$$

Un controesempio per la "non-equivalenza"

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \not\equiv \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$$

può essere mostrato considerando il modello $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$ dove

$$I(P) = \underbrace{\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}}_{\text{numeri pari}} \qquad I(Q) = \underbrace{\{2n+1 \mid n \in \mathbb{N}\}}_{\text{numeri dispari}}$$

Con tale modello, si ha che

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \models \forall x(P(x) \vee Q(x)) &\iff \widetilde{\forall} d \in \mathbb{N} \quad (\mathcal{A}, [d/x]) \models P(x) \vee Q(x) \\ &\iff \widetilde{\forall} d \in \mathbb{N} \quad (d \in I(P) \text{ o } d \in I(Q)) \\ &\iff \widetilde{\forall} d \in \mathbb{N} \quad (d \text{ è pari o } d \text{ è dispari})\end{aligned}$$

quindi $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ è vera nel modello, ma, d'altra parte,

$$\begin{aligned}&\mathcal{A} \models \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \\ &\qquad\iff (\widetilde{\forall} d \in \mathbb{N} \ (\mathcal{A}, [d/x]) \models P(x)) \ \text{ oppure } \ (\widetilde{\forall} d \in \mathbb{N} \ (\mathcal{A}, [d/x]) \models Q(x)) \\ &\qquad\iff (\widetilde{\forall} d \in \mathbb{N} \ d \in I(P)) \ \text{ oppure } \ (\widetilde{\forall} d \in \mathbb{N} \ d \in I(Q)) \\ &\qquad\iff (\widetilde{\forall} d \in \mathbb{N} \ d \text{ è pari}) \ \text{ oppure } \ (\widetilde{\forall} d \in \mathbb{N} \ d \text{ è dispari})\end{aligned}$$

quindi la formula $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ non è vera nel modello: siccome esiste un modello (e un assegnamento) che rende vera una formula ma non l'altra, l'equivalenza non vale.

4 Formule non contenenti la variabile quantificata

Data una formula $\forall x \varphi$ o $\exists x \varphi$, se $x \notin \mathrm{FV}(\varphi)$ il quantificatore non influisce sul valore della formula, quindi può essere eliminato:

$$\left.\begin{aligned}\forall x \varphi &\equiv \varphi \\ \exists x \varphi &\equiv \varphi\end{aligned}\right. \qquad \text{se } x \notin \mathrm{FV}(\varphi)$$

Analogamente, se la formula quantificata è una congiunzione o disgiunzione avente un argomento ψ tale che $x \notin \mathrm{FV}(\psi)$, allora ψ può essere "portata fuori" dal quantificatore:

$$\left.\begin{aligned}\forall x(\varphi \wedge \psi) &\equiv (\forall x \varphi) \wedge \psi \\ \forall x(\varphi \vee \psi) &\equiv (\forall x \varphi) \vee \psi \\ \exists x(\varphi \wedge \psi) &\equiv (\exists x \varphi) \wedge \psi \\ \exists x(\varphi \vee \psi) &\equiv (\exists x \varphi) \vee \psi\end{aligned}\right. \qquad \text{se } x \notin \mathrm{FV}(\psi)$$

5 Ordine dei quantificatori

L'ordine dei quantificatori dello *stesso tipo* non importa:

$$\forall x \forall y \varphi \equiv \forall y \forall x \varphi$$
$$\exists x \exists y \varphi \equiv \exists y \exists x \varphi$$

Invece, non si può scambiare l'ordine di quantificatori di tipi diversi:

$$\forall x \exists y \varphi \not\equiv \exists y \forall x \varphi$$

Ad esempio, considerando il modello $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$ con $I(M) = \{(n, m) \mid n < m\}$:

- la formula $\varphi_1 = \forall x \exists y M(x, y)$ esprime il fatto che, per ogni numero $n \in \mathbb{N}$, ne esiste un altro $m \in \mathbb{N}$ più grande, ovvero che *non esiste un elemento massimo* nel dominio $\mathbb{N}$;
- la formula $\varphi_2 = \exists y \forall x M(x, y)$ esprime il fatto che esiste un numero più grande di tutti gli altri, cioè che *esiste un elemento massimo* in $\mathbb{N}$.

Dunque, in questo caso, le due formule φ_1 e φ_2 hanno significati opposti. In particolare, i numeri naturali non hanno un massimo, quindi, intuitivamente, $\mathcal{A} \models \varphi_1$ ma $\mathcal{A} \not\models \varphi_2$ (e ciò si potrebbe verificare anche in modo formale), da cui segue che $\varphi_1 \not\equiv \varphi_2$.

6 Schema riassuntivo

Riassumendo, le equivalenze fondamentali che coinvolgono i quantificatori sono:

$$\begin{aligned}
\forall x \varphi &\equiv \varphi && \text{se } x \notin \mathrm{FV}(\varphi) \\
\exists x \varphi &\equiv \varphi && \text{se } x \notin \mathrm{FV}(\varphi) \\[1ex]
\forall x \forall y \varphi &\equiv \forall y \forall x \varphi \\
\exists x \exists y \varphi &\equiv \exists y \exists x \varphi \\
\forall x \exists y \varphi &\not\equiv \exists y \forall x \varphi \\[1ex]
\forall x (\varphi_1 \land \varphi_2) &\equiv \forall x \varphi_1 \land \forall x \varphi_2 \\
\exists x (\varphi_1 \lor \varphi_2) &\equiv \exists x \varphi_1 \lor \exists x \varphi_2 \\[1ex]
\forall x (\varphi_1 \land \varphi_2) &\equiv (\forall x \varphi_1) \land \varphi_2 && \text{se } x \notin \mathrm{FV}(\varphi_2) \\
\forall x (\varphi_1 \lor \varphi_2) &\equiv (\forall x \varphi_1) \lor \varphi_2 && \text{se } x \notin \mathrm{FV}(\varphi_2) \\
\exists x (\varphi_1 \land \varphi_2) &\equiv (\exists x \varphi_1) \land \varphi_2 && \text{se } x \notin \mathrm{FV}(\varphi_2) \\
\exists x (\varphi_1 \lor \varphi_2) &\equiv (\exists x \varphi_1) \lor \varphi_2 && \text{se } x \notin \mathrm{FV}(\varphi_2)
\end{aligned}$$

7 Equivalenze logiche della logica proposizionale

Come già anticipato, *tutte le equivalenze logiche della logica proposizionale valgono anche per la logica dei predicati.*

Ad esempio:

$$
\begin{aligned}
\forall x(P(x) \to Q(x,y)) &\equiv \forall x(\neg P(x) \lor Q(x,y)) && (\quad A \to B \equiv \neg A \lor B \quad) \\
&\equiv \neg\exists x \neg(\neg P(x) \lor Q(x,y)) && (\quad \forall x\varphi \equiv \neg\exists x\neg\varphi \quad) \\
&\equiv \neg\exists x(\neg\neg P(x) \land \neg Q(x,y)) && (\neg(A \lor B) \equiv \neg A \land \neg B) \\
&\equiv \neg\exists x(P(x) \land \neg Q(x,y)) && (\quad \neg\neg A \equiv A \quad)
\end{aligned}
$$

8 Nomi delle variabili

Sia φ una formula contenente la variabile x; per indicare ciò si usa la notazione $\varphi(x)$.

In una formula $\forall x\varphi(x)$ (o $\exists x\varphi(x)$), se si rimpiazza la variabile quantificata x con una *nuova* y (cioè una y che non occorre, né libera né legata, in φ), sostituendo tutte le occorrenze di x con y in φ, si ottiene una formula equivalente:

$$\forall x\varphi(x) \equiv \forall y\varphi(y) \qquad \text{se } y \text{ non occorre in } \varphi$$

(e analogamente per $\exists$).

Infatti, considerando un'arbitraria coppia modello–assegnamento $(\mathcal{M}, e)$:

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{M}, e) \models \forall x\varphi(x) &\iff \widetilde{\forall} d \in D \quad (\mathcal{M}, e[d/x]) \models \varphi(x) \\
&\iff \widetilde{\forall} d \in D \quad (\mathcal{M}, e[d/y]) \models \varphi(y) \\
&\iff (\mathcal{M}, e) \models \forall y\varphi(y)
\end{aligned}
$$

Se, invece, la variabile y è già presente nella formula, non si ha appunto l'equivalenza logica. Ad esempio, se $\varphi(x) = \exists yQ(x,y)$,

$$\forall x\underbrace{\exists yQ(x,y)}_{\varphi(x)} \not\equiv \forall y\underbrace{\exists yQ(y,y)}_{\varphi(y)}$$

perché y occorre (in questo caso legata) in φ.