Azzolini Riccardo 2020-05-07

Risoluzione

1 Metodo di risoluzione

Il metodo di **risoluzione** (o calcolo per risoluzione) è un sistema di prova (calcolo logico) che è basato sostanzialmente su un'unica regola, e quindi risulta particolarmente semplice da implementare in modo automatico (infatti, esso è alla base della programmazione logica e di molti dimostratori automatici).

Inoltre, esso è molto efficiente quando lo si applica su (insiemi di) formule che hanno una forma particolare. A partire dal metodo di risoluzione per la logica del primo ordine, ristretto su specifici insiemi di formule, si definisce il modello computazionale su cui è basato il linguaggio di programmazione *Prolog* (1972), utilizzato soprattutto nell'ambito dell'intelligenza artificiale e della manipolazione simbolica.

Il "prezzo da pagare" per la semplicità del metodo di risoluzione è il fatto che si possano considerare solo le formule in forma normale congiuntiva. Ciò non è un limite per quanto riguarda l'espressività semantica (perché, come dimostrato in precedenza, per ogni formula della logica proposizionale classica ne esiste una equivalente in CNF), ma risulta "scomodo" dal punto di vista della lettura delle formule: il significato di una formula trasformata in CNF tende a essere meno chiaro rispetto a quello della formula originale.

2 Clausole

Definizione: Una **clausola** è una disgiunzione di letterali.

Per comodità, una clausola può essere rappresentata come un insieme di letterali:

$$C = l_1 \vee \cdots \vee l_m \implies \mathcal{C} = \{l_1, \dots, l_m\}$$

Questa rappresentazione è "corretta" perché:

- la disgiunzione è commutativa e associativa, quindi non importa l'ordine in cui i letterali sono scritti;
- la disgiunzione è idempotente, quindi non importa ripetere due volte lo stesso letterale ($l_i \vee l_i \equiv l_i$).

Ad esempio, le seguenti formule sono logicamente equivalenti,

$$(X \vee Y) \vee \neg Z \equiv (\neg Z \vee Y) \vee X \equiv \neg Z \vee \neg Z \vee (Y \vee X)$$

e sono tutte rappresentate dall'insieme di letterali $C = \{X, Y, \neg Z\}$.

3 Forme normali e clausole

Come già visto, le formule in forma normale congiuntiva sono quelle del tipo

$$D = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{m_i} l_{i,j} \right)$$

e ogni formula H è equivalente a una formula D in CNF:

$$H \equiv D = C_1 \wedge \cdots \wedge C_n \qquad C_i = \bigvee_{j=1}^{m_i} l_{i,j}$$

Si osserva che ciascuna C_i è una clausola. Allora, siccome anche la congiunzione è commutativa, associativa e idempotente, una CNF può essere rappresentata come un insieme contenente le clausole che compaiono nella congiunzione:

$$H \equiv D = C_1 \wedge \cdots \wedge C_n \implies \mathcal{S} = \{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n\}$$

Ad esempio, la CNF

$$D = (X \vee \neg Y) \wedge (Z \vee \neg X \vee Y)$$

corrisponde all'insieme

$$\mathcal{S} = \{\{X, \neg Y\}, \{Z, \neg X, Y\}\}$$

4 Semantica delle clausole

La semantica della rappresentazione insiemistica è indotta dalla semantica delle formule che tale rappresentazione descrive. In particolare, data una valutazione $v : VAR \to \{0, 1\}$, si ha che:

- $v \models \mathcal{C}_i = \{l_1, \dots, l_m\}$ se almeno un letterale della clausola è vero in v,

  $$\widetilde{\exists} j = 1, \dots, m\colon\ v \models l_j$$

  cioè se $v \models l_1 \vee \cdots \vee l_m$;

- $v \models \mathcal{S} = \{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n\}$ se tutte le clausole dell'insieme sono vere in v,

  $$\widetilde{\forall} i = 1, \dots, n\colon\ v \models \mathcal{C}_i$$

  cioè se $v \models \mathcal{C}_1 \land \dots \land \mathcal{C}_n$.

Rimane da chiarire cosa accada nei casi limite in cui questi insiemi sono vuoti (nel caso delle formule, il problema non si presenta perché è impossibile scrivere una clausola che non contenga nessun letterale, o una congiunzione di 0 clausole):

- Una clausola è vera in una valutazione v se esiste almeno un letterale vero in v. Nella **clausola vuota** $\mathcal{C} = \varnothing$, tale letterale non può esistere, quindi l'unica semantica "ragionevole" è che $\mathcal{C}$ sia insoddisfacibile.

  Per rappresentare la clausola vuota, si introduce il simbolo $\square$.
- Un insieme di clausole (in quanto rappresentazione di una formula in CNF) è soddisfatto da una valutazione v se ogni clausola appartenente a esso è vera in v. Nell'**insieme vuoto di clausole** $\mathcal{S} = \varnothing$, non c'è alcuna clausola che possa essere falsa in v, quindi $\mathcal{S}$ si può considerare soddisfatto da ogni interpretazione.

  Il simbolo che verrà in seguito usato per rappresentare l'insieme vuoto di clausole è semplicemente $\varnothing$.

5 Equivalenza e conseguenza logica

Definizione: Siano $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ due insiemi di clausole.

- $\mathcal{S}$ è **logicamente equivalente** a $\mathcal{S}'$ (in simboli $\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}'$) se $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$ sono soddisfatti dalle stesse valutazioni.
- $\mathcal{S}'$ è **conseguenza logica** di $\mathcal{S}$ ($\mathcal{S} \models \mathcal{S}'$) se ogni valutazione che soddisfa $\mathcal{S}$ soddisfa anche $\mathcal{S}'$.

Osservazione: Anche queste definizioni sono indotte immediatamente dalle analoghe definizioni sulle formule rappresentate da $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}'$.

6 Tautologie

Due proprietà immediate delle clausole (e degli insiemi di clausole) sono le seguenti:

Proposizione:

- Una clausola è una **tautologia**, cioè è verificata da ogni valutazione, se e solo se contiene un letterale e la sua negazione.

  $$\models \mathcal{C} = \{\dots, p, \neg p, \dots\}$$

- Sia $\mathcal{S}'$ l'insieme di clausole ottenuto cancellando da $\mathcal{S}$ una tautologia. Allora, $S \equiv S'$.

  In simboli,
  $$\mathcal{S} = \{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n, T\} \equiv \{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n\} = \mathcal{S}'$$
  dove $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n, T$ sono clausole, e $T = \{\ldots, p, \neg p, \ldots\}$ è una tautologia.

  Ad esempio,
  $$\mathcal{S} = \{\{X, Y, \neg Z\}, \{X, \neg Y\}, \underbrace{\{X, \neg X, Y\}}_{\text{tautologia}}\}$$
  è logicamente equivalente a
  $$\mathcal{S}' = \{\{X, Y, \neg Z\}, \{X, \neg Y\}\}$$

  Ciò può anche essere verificato controllando l'equivalenza logica tra le formule corrispondenti:
  $$(X \lor Y \lor \neg Z) \land (X \lor \neg Y) \land (X \lor \neg X \lor Y) \equiv (X \lor Y \lor \neg Z) \land (X \lor \neg Y)$$

7 Complemento di un letterale

Notazione: Dato un letterale L, si indica con $\overline{L}$ il suo **complemento**, cioè
$$\overline{L} = \begin{cases} p & \text{se } L = \neg p \\ \neg p & \text{se } L = p \end{cases}$$

8 Regola di risoluzione e risolvente

Definizione: Siano $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ due clausole per cui esiste un letterale L tale che $L \in \mathcal{C}_1$ e $\overline{L} \in \mathcal{C}_2$. Si chiama **risolvente** $\mathcal{R}$ di $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ (rispetto al letterale L) la clausola
$$\mathcal{R} = (\mathcal{C}_1 \setminus \{L\}) \cup (\mathcal{C}_2 \setminus \{\overline{L}\})$$

Si dice anche che $\mathcal{R}$ si ottiene per **risoluzione** da $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$.

La risoluzione può essere rappresentata anche con la notazione delle regole:
$$\frac{\mathcal{C}', L \qquad \mathcal{C}'', \overline{L}}{\mathcal{C}', \mathcal{C}''}\,\text{ris}$$

(ponendo $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}' \cup \{L\}$ e $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}'' \cup \{\overline{L}\}$).

8.1 Esempio

Se

$$\mathcal{C}_1 = \{\neg X, \neg Y, Z\} \qquad \mathcal{C}_2 = \{Y, H, Z\}$$

allora il risolvente di $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ rispetto a Y è

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= (\mathcal{C}_1 \setminus \{Y\}) \cup (\mathcal{C}_2 \setminus \{\overline{Y}\}) \\ &= \{\neg X, Z\} \cup \{H, Z\} \\ &= \{\neg X, Z, H\} \end{aligned}$$

Scritto come regola:

$$\frac{\{\neg X, \neg Y, Z\} \qquad \{Y, H, Z\}}{\{\neg X, Z, H\}}\,\text{ris}$$