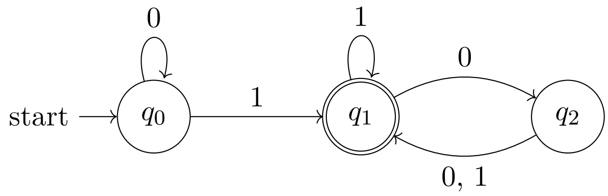
Azzolini Riccardo 2020-10-05

DFA — Esempi di accettazione

1 Esempio

Si consideri l'automa rappresentato dal seguente diagramma:



Formalmente, questo è un automa $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$ con:

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$,
- $\Sigma = \{0, 1\}$,
- δ rappresentata dalla tabella

δ	0	1
q_0	q_0	q_1
q_1	q_2	q_1
q_2	q_1	q_1

- stato iniziale q_0,
- $F = \{q_1\}$.

La stringa 111 è *accettata* dall'automa A, perché esiste (ed è unica, essendo A un automa deterministico) una sequenza di stati q_0, q_1, q_1, q_1 che verifica le tre condizioni della definizione di accettazione:

1. q_0 è lo stato iniziale;
2. la sequenza di stati è coerente con la funzione di transizione,

$$\delta(q_0, 1) = q_1 \quad \delta(q_1, 1) = q_1 \quad \delta(q_1, 1) = q_1$$

   o, scritto come sequenza di mosse,

$$\to q_0 \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{1} q_1$$

3. q_1 è uno stato finale.

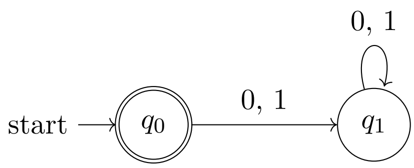
Invece, la stringa 110 *non è accettata*: siccome A è deterministico, esiste un'unica sequenza di stati che verifichi le condizioni 1 e 2 della definizione di accettazione, q_0, q_1, q_1, q_2, ma questa non soddisfa la condizione 3. Infatti, dati lo stato iniziale q_0 e la stringa in input $w = 110$, si determina univocamente la sequenza di mosse

$$\to q_0 \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{0} q_2$$

e q_2 *non* è uno stato finale.

2 Automa che accetta solo la stringa vuota

Si consideri l'automa



ovvero $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, con:

- $Q = \{q_0, q_1\}$,
- $\Sigma = \{0, 1\}$,
- δ rappresentata dalla tabella

δ	0	1
q_0	q_1	q_1
q_1	q_1	q_1

- stato iniziale q_0,
- $F = \{q_0\}$.

Esso accetta la stringa vuota ϵ, perché la sequenza di stati costituita dal solo q_0 soddisfa le tre condizioni della definizione.

Invece, A non accetta qualunque stringa $w = a_1 a_2 \dots a_n \in \{0, 1\}^*$ con $|w| = n \geq 1$, perché allora la sola sequenza di mosse possibile è

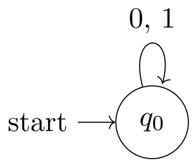
$$\to q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_1 \cdots \xrightarrow{a_n} q_1$$

che corrisponde alla sequenza di stati $q_0, q_1, q_1, \dots, q_1$: siccome q_1 non è uno stato finale, la terza condizione della definizione di accettazione non è soddisfatta. Informalmente, il primo simbolo a_1 di w, sia esso 0 oppure 1, porta l'automa dallo stato q_0 allo stato q_1, dopodiché l'automa non ha modo di "uscire" dallo stato q_1.

Si deduce quindi che il linguaggio accettato da A è $L(A) = \{\epsilon\}$, ovvero il linguaggio formato dalla sola stringa vuota.

3 Automa che riconosce il linguaggio vuoto

Si consideri un automa $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$



avente:

- $Q = \{q_0\}$,
- $\Sigma = \{0, 1\}$,
- δ rappresentata dalla tabella

δ	0	1
q_0	q_0	q_0

- stato iniziale q_0,
- $F = \varnothing$ (nessuno stato finale).

Questo automa:

- non accetta la stringa vuota ϵ, perché la sequenza di stati costituita dal solo q_0, l'unica possibile per l'input ϵ, soddisfa le prime due condizioni della definizione, ma non la terza;
- non accetta una qualunque stringa $w = a_1 a_2 \dots a_n \in \{0, 1\}^*$ con $n \geq 1$, perché l'unica sequenza di mosse possibile per w,

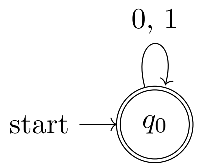
$$\to q_0 \xrightarrow{a_1} q_0 \xrightarrow{a_2} q_0 \cdots \xrightarrow{a_n} q_0$$

  dà luogo alla sequenza di stati $q_0, q_0, q_0, \dots, q_0$, che soddisfa le prime due condizioni della definizione ma non la terza.

Si deduce allora che questo automa riconosce il linguaggio vuoto, $L(A) = \varnothing$, ovvero non accetta alcuna stringa.

4 Automa che accetta tutte le stringhe

Come ultimo esempio, si consideri un automa $A = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$



caratterizzato da:

- $Q = \{q_0\}$,
- $\Sigma = \{0, 1\}$,
- δ rappresentata dalla tabella

δ	0	1
q_0	q_0	q_0

- stato iniziale q_0,
- $F = \{q_0\} = Q$.

Si osserva che questo automa è quasi identico al precedente: l'unica differenza è che qui il singolo stato q_0 è finale. Ciò determina però un comportamento "opposto" rispetto all'esempio precedente:

- la stringa vuota ϵ è accettata perché la sequenza di stati costituita dal solo q_0 soddisfa le tre condizioni della definizione;
- una stringa $w = a_1 \dots a_n \in \{0, 1\}^*$ con $n \geq 1$ determina la sequenza di mosse

  $$\to q_0 \xrightarrow{a_1} q_0 \xrightarrow{a_2} q_0 \cdots \xrightarrow{a_n} q_0$$

  ovvero la sequenza di stati $q_0, q_0, q_0, \dots, q_0$, che soddisfa le tre condizioni della definizione.

Il linguaggio riconosciuto da A è dunque quello che comprende tutte le possibili stringhe sull'alfabeto: $L(A) = \{0, 1\}^* = \Sigma^*$.