Azzolini Riccardo 2020-03-20

Conseguenza logica: alcuni teoremi

1 Proprietà della conseguenza logica

Teorema: $\Delta \models A$ se e solo se $\Delta \cup \{\neg A\}$ è insoddisfacibile.

Dimostrazione: Si assume $\Delta \models A$. Per definizione, ciò è vero se e solo se

$$\widetilde{\forall} v\colon v \not\models \Delta \text{ o } v \models A$$

che equivale a

$$\widetilde{\forall} v\colon v \not\models \Delta \text{ o } v \not\models \neg A$$

(perché, in una valutazione, A è vera se e solo se $\neg A$ è falsa, per la definizione del valore di verità della negazione), e questo è a sua volta equivalente a

$$\widetilde{\forall} v\colon v \not\models \Delta \cup \{\neg A\}$$

perché:

- se v non verifica Δ, c'è almeno una formula in Δ che non viene soddisfatta, ed essa sarà presente anche in $\Delta \cup \{\neg A\}$;
- se v non verifica $\neg A$, allora $\Delta \cup \{\neg A\}$ contiene una formula ($\neg A$, appunto) che non è soddisfatta da v.

Infine, $\widetilde{\forall} v\colon v \not\models \Delta \cup \{\neg A\}$ è la definizione di insoddisfacibilità: $\Delta \cup \{\neg A\}$ è insoddisfacibile.

In sintesi, la dimostrazione è:

$$\begin{aligned}
\Delta \models A &\text{ sse } \widetilde{\forall} v\colon v \not\models \Delta \text{ o } v \models A \\
&\text{ sse } \widetilde{\forall} v\colon v \not\models \Delta \text{ o } v \not\models \neg A \\
&\text{ sse } \widetilde{\forall} v\colon v \not\models \Delta \cup \{\neg A\} \\
&\text{ sse } \Delta \cup \{\neg A\} \text{ è insoddisfacibile} \qquad \square
\end{aligned}$$

Nota: La notazione $\widetilde{\forall}$ viene usata come simbolo del meta-linguaggio, per abbreviare la frase in linguaggio naturale "per ogni". Analogamente, verrà usato $\widetilde{\exists}$ per abbreviare "esiste". Questa notazione permetterà di evitare le ambiguità quando, più avanti, $\forall$ e $\exists$ (senza la tilde) verranno introdotti come simboli del linguaggio della logica del primo ordine.

1.1 Caso particolare

Nel caso in cui $\Delta = \varnothing$, la definizione di conseguenza logica diventa: A è una conseguenza logica di $\varnothing$ se, per ogni valutazione v tale che $v \models \varnothing$, si ha $v \models A$.

$v \models \varnothing$ è vero se, per ogni formula A in $\varnothing$, $v \models A$. Siccome non c'è alcuna formula $A \in \varnothing$ da considerare, $v \models \varnothing$ è vero indipendentemente dalla scelta di v. Allora, tornando alla definizione di conseguenza logica, la condizione "tale che $v \models \varnothing$" si elimina, in quanto sempre verificata: A è una conseguenza logica di $\varnothing$ se, per ogni valutazione v, $v \models A$, cioè se A è una tautologia. Si ottiene così il seguente corollario del teorema precedente:

Corollario:[1] A è una tautologia se e solo se $\neg A$ è insoddisfacibile.

2 Teorema di deduzione (semantica)

Teorema: $\Delta, A \models B$ se e solo se $\Delta \models A \to B$.

Nota: Per semplificare la notazione, alla sinistra del simbolo di conseguenza logica si scrive Δ, A per indicare l'insieme $\Delta \cup \{A\}$.

Dimostrazione: Si studiano separatamente le due direzioni del "se e solo se":

- $\Delta, A \models B \implies \Delta \models A \to B$

  Si considera una valutazione $v\colon v \models \Delta$. Ci sono due casi possibili: o $v \models A$, o altrimenti $v \not\models A$.

  - Se $v \models A$, la valutazione v verifica sia Δ che A, e allora, dall'ipotesi $\Delta, A \models B$, si deduce che $v \models B$. Quindi, essendo verificati sia A che B, è vera anche l'implicazione $A \to B$, cioè $v \models A \to B$.
  - Se, invece, $v \not\models A$, si ha immediatamente $v \models A \to B$, per la definizione di validità dell'implicazione (un'implicazione è sempre vera se l'antecedente è falso).

- $\Delta \models A \to B \implies \Delta, A \models B$

  La dimostrazione di questa direzione del "se e solo se" viene eseguita tramite la contronominale (che è equivalente):

  $$\Delta, A \not\models B \implies \Delta \not\models A \to B$$

  Come primo passo, si assume $\Delta, A \not\models B$. Per definizione, questo significa che

  $$\tilde{\exists} v\colon v \models \Delta \text{ e } v \models A \text{ e } v \not\models B$$

[1] Normalmente, in matematica, un risultato ottenuto come caso particolare di un altro viene chiamato appunto "corollario".

Se A è vera e B falsa, allora è falsa anche l'implicazione $A \to B$,

$$\widetilde{\exists} v \colon v \models \Delta \text{ e } v \not\models A \to B$$

e questo significa che $\Delta \not\models A \to B$. $\square$

2.1 Proprietà utile

Proposizione: $\Delta, A \models B \to C$ se e solo se $\Delta \models A \land B \to C$.

Dimostrazione: Si dimostra la forma equivalente

$$\Delta, A \not\models B \to C \text{ sse } \Delta \not\models A \land B \to C$$

$$\begin{aligned}
\Delta, A \not\models B \to C &\text{ sse } \widetilde{\exists} v \colon v \models \Delta \text{ e } v \models A \text{ e } v \not\models B \to C \\
&\text{ sse } \widetilde{\exists} v \colon v \models \Delta \text{ e } v \models A \text{ e } v \models B \text{ e } v \not\models C \\
&\text{ sse } \widetilde{\exists} v \colon v \models \Delta \text{ e } v \models A \land B \text{ e } v \not\models C \\
&\text{ sse } \widetilde{\exists} v \colon v \models \Delta \text{ e } v \not\models A \land B \to C \\
&\text{ sse } \Delta \not\models A \land B \to C \qquad \square
\end{aligned}$$

2.2 Alcune considerazioni

Sia $\Delta = \{A_1, \dots, A_n\}$ un insieme finito di formule, tali che $A_1, \dots, A_n \models B$. Applicando iterativamente il teorema di deduzione, si ottiene:

$$\begin{aligned}
A_1, \dots, A_{n-1} &\models A_n \to B \\
A_1, \dots, A_{n-2} &\models A_{n-1} \to (A_n \to B) \\
A_1, \dots, A_{n-3} &\models A_{n-2} \to (A_{n-1} \to (A_n \to B)) \\
&\vdots \\
&\models A_1 \to (A_2 \to \cdots (A_{n-1} \to (A_n \to B)) \cdots)
\end{aligned}$$

Poi, utilizzando la proprietà

$$\Delta, A \models B \to C \text{ sse } \Delta \models A \land B \to C$$

le formule ottenute dalle applicazioni del teorema di deduzione possono essere riscritte usando la congiunzione invece di una catena di implicazioni:

$$\begin{aligned}
A_1, \dots, A_{n-1} &\models A_n \to B \\
A_1, \dots, A_{n-2} &\models A_{n-1} \land A_n \to B \\
A_1, \dots, A_{n-3} &\models A_{n-2} \land A_{n-1} \land A_n \to B \\
&\vdots \\
&\models A_1 \land A_2 \land \cdots \land A_{n-1} \land A_n \to B
\end{aligned}$$

Quindi, se $A_1, \ldots, A_n \to B$, si hanno le seguenti tautologie:

$$\models A_1 \to (A_2 \to \cdots (A_{n-1} \to (A_n \to B)) \cdots)$$
$$\models A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_{n-1} \wedge A_n \to B$$

Introducendo la notazione
$$\bigwedge \Delta = A_1 \wedge \cdots \wedge A_n$$
(che si legge "e grande di delta") per indicare la congiunzione delle formule appartenenti all'insieme finito $\Delta = \{A_1, \ldots, A_n\}$, si può scrivere in modo più compatto che:

$$\Delta \models B \text{ sse } \models \bigwedge \Delta \to B$$