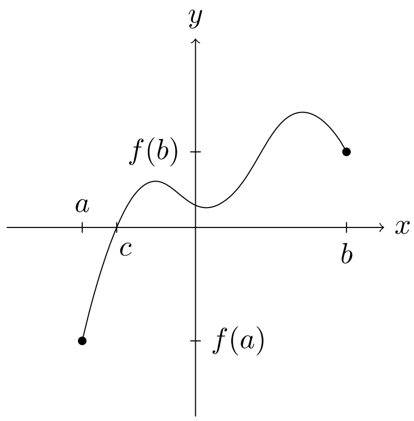
Azzolini Riccardo 2019-04-02

Teoremi sulle funzioni continue

1 Teorema degli zeri

Teorema: Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua, tale che $f(a)f(b) < 0$, cioè che assuma valori discordi (e diversi da 0) agli estremi dell'intervallo. Allora, esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.



Dimostrazione: Si suppone $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$ (la dimostrazione è analoga nell'altro caso). Sia $c_0 = \frac{a+b}{2}$. Se $f(c_0) = 0$, il teorema è dimostrato. Altrimenti,

- se $f(c_0) < 0$, si considera l'intervallo $[c_0, b]$ e si pone $c_1 = \frac{c_0+b}{2}$, perché $f(c_0) < 0$ e $f(b) > 0$
- se $f(c_0) > 0$, si considera invece l'intervallo $[a, c_0]$, ponendo $c_1 = \frac{a+c_0}{2}$, dato che $f(a) < 0$ e f(c0) > 0$

e si ripete lo stesso procedimento sull'intervallo considerato.

Andando avanti così, all'n-esimo passo si ottiene un intervallo $[a_n, b_n]$, tale che $f(a_n) < 0$ e $f(b_n) > 0$. Inoltre, a ogni passo, l'estremo sinistro dell'intervallo si può "spostare" solo verso destra, e viceversa, ed entrambi gli estremi rimangono sempre compresi tra quelli dell'intervallo iniziale $[a, b]$, quindi

- la successione $\{a_n\}$ è crescente e limitata: $a \le a_n \le a_{n+1} \le b$;
- la successione $\{b_n\}$ è decrescente e limitata: $a \le b_{n+1} \le b_n \le b$.

Di conseguenza,

$$\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = c \in \mathbb{R} \qquad \exists \lim_{n\to+\infty} b_n = c' \in \mathbb{R}$$

Per le proprietà dei limiti,

$$c' - c = \lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n)$$

dove $b_n - a_n$ è l'ampiezza dell'intervallo $[a_n, b_n]$, che parte dall'ampiezza di $[a, b]$ e si dimezza a ogni passo,

$$c' - c = \lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0$$

che implica $c' = c$.

Siccome $f(a_n) < 0$ e $f(b_n) > 0$, e siccome la funzione f è continua (per ipotesi),

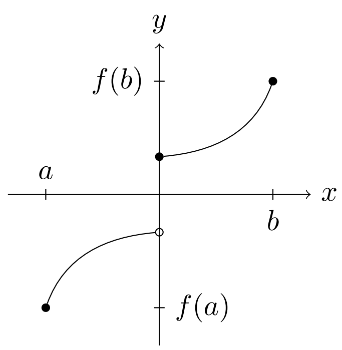
$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(c) \le 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(c) \ge 0$$

e allora deve essere $f(c) = 0$. □

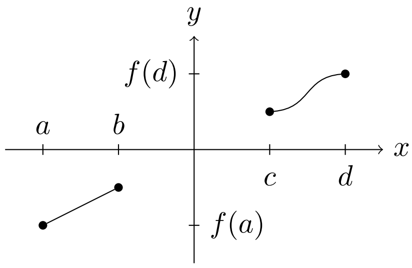
1.1 Necessità delle ipotesi

Osservazione: Servono tutte le ipotesi per garantire l'esistenza di $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.

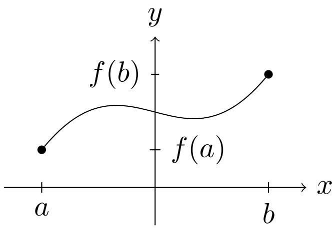
- Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $f(a)f(b) < 0$, ma f *non è continua*:



- Se $f : [a, b] \cup [c, d] \to \mathbb{R}$, cioè il dominio *non è un intervallo*, anche se $f(a)f(d) < 0$ e f è continua:

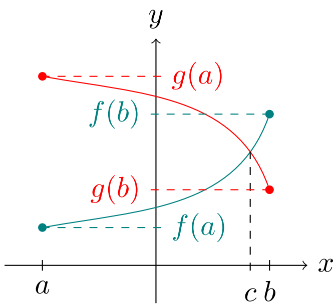


- Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e f è continua, ma $f(a)f(b) > 0$, cioè i valori agli estremi sono *concordi*:



1.2 Corollario

Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue. Se $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$, o viceversa, allora esiste almeno un punto $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = g(c)$.



Dimostrazione: Sia $h(x) = f(x) - g(x)$. Essa è una funzione continua, in quanto differenza di funzioni continue. Inoltre,

$$h(a) = f(a) - g(a) < 0$$
$$h(b) = f(b) - g(b) > 0$$

quindi $h(a)h(b) < 0$, e allora, per il teorema degli zeri, $\exists c \in (a, b)$ tale che $h(c) = 0 \iff f(c) = g(c)$. $\square$

1.2.1 Esempio

Il corollario del teorema degli zeri permette di dimostrare che l'equazione

$$x^6 + 2x^5 - 3x^2 - x = 1 - \sqrt{2}$$

ammette almeno una soluzione reale. Infatti,

$$f(x) = x^6 + 2x^5 - 3x^2 - x$$
$$g(x) = 1 - \sqrt{2} \approx -0.41$$

sono entrambe funzioni continue, e

$$f(1) = 1 + 2 - 3 - 1 = -1 < g(1)$$
$$f(2) = 64 + 64 - 12 - 2 = 114 > g(2)$$

quindi in $[1, 2]$ sono soddisfatte le ipotesi del corollario. Di conseguenza, $\exists c \in (1, 2)$ tale che

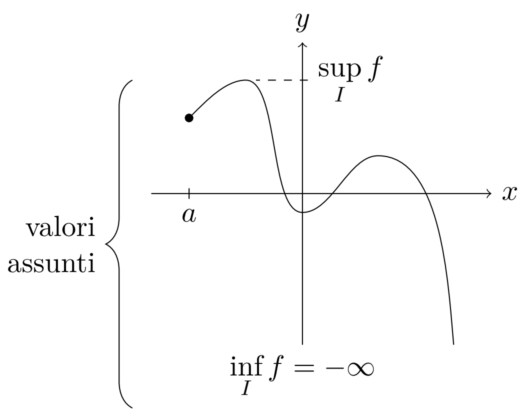
$$f(c) = g(c)$$
$$c^6 + 2c^5 - 3c^2 - c = 1 - \sqrt{2}$$

cioè c è una soluzione dell'equazione.

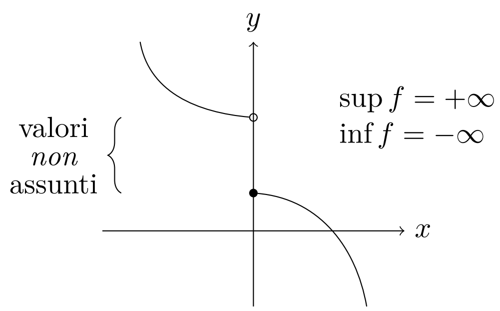
2 Teorema dei valori intermedi

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua, il cui dominio I è un intervallo (qualsiasi, eventualmente anche illimitato). Allora, f assume tutti i valori compresi tra $\inf_I f$ $(\in \mathbb{R} \cup \{-\infty\})$ e $\sup_I f$ $(\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$, cioè $\forall y \in (\inf_I f, \sup_I f) \quad \exists x \in I$ tale che $f(x) = y$.

$$I = [a, +\infty)$$



Osservazione: L'ipotesi che f sia continua è necessaria perché, altrimenti, la tesi potrebbe non essere verificata:



3 Invertibilità e monotonia

Teorema: Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e invertibile, definita su un intervallo I. Allora, f è strettamente monotona.

Osservazione: Una funzione continua in un intervallo è invertibile se e solo se è strettamente monotona. Infatti, il viceversa di questo teorema vale anche per le funzioni non continue: una funzione strettamente monotona è sempre invertibile.

Dimostrazione: Si suppone per assurdo che f non sia strettamente monotona. Allora $\exists x < y < z$ tali che, per esempio, $f(z) < f(x) < f(y)$, cioè $f(x) \in (f(z), f(y))$. Per il teorema dei valori intermedi, $\exists \overline{x} \in (y, z)$ tale che $f(\overline{x}) = f(x)$. Siccome $\overline{x} \in (y, z)$ e $x \notin (y, z)$, si ha $\overline{x} \neq x$. Questo è assurdo perché f è invertibile, e quindi iniettiva. $\square$

4 Continuità della funzione inversa

Teorema: Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione continua e invertibile, e sia X

- un intervallo qualsiasi, oppure
- un insieme chiuso e limitato (ad esempio, un'unione di intervalli chiusi e limitati).

Allora, la funzione inversa f^{-1} di f è continua.

5 Teorema di Weierstrass

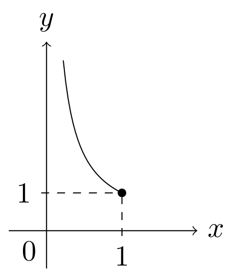
Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia X un insieme compatto (cioè chiuso e limitato). Allora esistono minimo e massimo assoluti:

$$m = \min_X f(x) \qquad M = \max_X f(x)$$

Osservazione: Se manca anche una sola ipotesi, la tesi può non essere vera. Ad esempio:

- Se X non è un insieme chiuso:

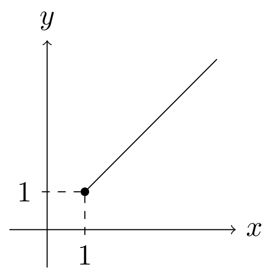
$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad X = (0, 1]$$



$$m = 1 \qquad \nexists M$$

- Se X non è limitato:

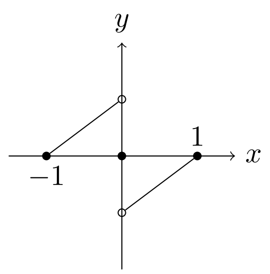
$$f(x) = x \qquad X = [1, +\infty)$$



$$m = 1 \qquad \nexists M$$

- Se f non è continua:

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$$



$$\nexists m \qquad \nexists M$$