Azzolini Riccardo 2019-04-15

Esempi di studio di funzioni

1 Esempio 1

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\log x}$$

1.1 Dominio

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x > 0 \\ \log x \neq 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$
$$D = (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

1.2 Limiti e asintoti

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\log x} = 0$$

Si prolunga f con continuità da destra in $x = 0$, ponendo $f(0) = 0$.

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{x}}{\log x} = -\infty$$

La retta $x = 1$ è un asintoto verticale.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\sqrt{x}}{\log x} = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\log x} = +\infty$$

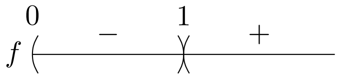
Non esiste un asintoto orizzontale. Bisogna allora verificare se esiste un asintoto obliquo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x\log x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}\log x}=0$$

Non esiste un asintoto obliquo.

1.3 Segno

$$\begin{aligned}f(x)&\geq 0\\ \frac{\sqrt{x}}{\log x}&\geq 0\\ \log x&>0\\ x&>1\end{aligned}$$



1.4 Derivata prima

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\log x}=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\log x}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\log x-\sqrt{x}\frac{1}{x}}{\log^2 x}=\frac{\frac{\log x}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\log^2 x}=\frac{\frac{\log x-2}{2\sqrt{x}}}{\log^2 x}=\frac{\log x-2}{2\sqrt{x}\log^2 x}$$

Siccome la funzione è stata prolungata con continuità da destra in $x=0$, bisogna determinare se esiste $f'_+(0)$:

$$\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x-2}{2\sqrt{x}\log^2 x}$$

Per risolvere questo limite, conviene calcolare separatamente il limite del denominatore, che è una forma indeterminata $0\cdot\infty$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x}\log^2 x &= 2\lim_{x\to 0^+}\frac{\log^2 x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 2\lim_{x\to 0^+}\frac{\log^2 x}{x^{-\frac{1}{2}}} \\
&\overset{\mathrm{H}}{=} 2\lim_{x\to 0^+}\frac{2(\log x)\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = 2\lim_{x\to 0^+}\left(-4x^{\frac{3}{2}-1}\log x\right) \\
&= -8\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\log x = -8\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{x^{-\frac{1}{2}}} \\
&\overset{\mathrm{H}}{=} -8\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = -8\lim_{x\to 0^+}\frac{-2x^{\frac{3}{2}}}{x} \\
&= 16\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x} = 0^+
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{\log x}^{-\infty}-2}{\underbrace{2\sqrt{x}\log^2 x}_{0^+}} = -\infty \implies \nexists f'_+(0)$$

cioè f ha retta tangente destra verticale in $x = 0$.

Osservazione: In generale, vale

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha}\log^{\beta} x = 0 \quad \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R},\ \alpha>0}$$

1.5 Monotonia ed estremi

$$\begin{aligned}
f'(x) &\geq 0 \\
\frac{\log x - 2}{2\sqrt{x}\log^2 x} &\geq 0 \\
\log x - 2 &\geq 0 \\
\log x &\geq 2 \\
x &\geq e^2
\end{aligned}$$

	0		1		e^2	
f'	(	$-$	)(	$-$	|	$+$
		↘		↘		↗

- f decresce in $(0, 1)$ e $(1, e^2)$.
- f cresce in $(e^2, +\infty)$.
- In $x = 0$ (dove è stata prolungata con continuità da destra), f ha un massimo relativo, con $f(0) = 0$.
- In $x = e^2$, f ha un minimo relativo, con

$$f(e^2) = \frac{\sqrt{e^2}}{\log e^2} = \frac{e}{2}$$

I due estremi, in $x = 0$ e $x = e^2$, non sono assoluti perché f tende a $-\infty$ per $x \to 1^-$ e a $+\infty$ per $x \to 1^+$, quindi è illimitata.

1.6 Derivata seconda

$$f'(x) = \frac{\log x - 2}{2\sqrt{x}\log^2 x} = \frac{\log x - 2}{2x^{\frac{1}{2}}\log^2 x}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{\frac{1}{x} \cdot 2\sqrt{x}\log^2 x - (\log x - 2)\left(x^{-\frac{1}{2}}\log^2 x + 2\sqrt{x} \cdot 2(\log x)\frac{1}{x}\right)}{4x\log^4 x} \\
&= \frac{\frac{2\sqrt{x}\log^2 x}{x} - (\log x - 2)\left(\frac{\log^2 x}{\sqrt{x}} + \frac{4\sqrt{x}\log x}{x}\right)}{4x\log^4 x} \\
&= \frac{\frac{2\log^2 x}{\sqrt{x}} - (\log x - 2)\left(\frac{\log^2 x}{\sqrt{x}} + \frac{4\log x}{\sqrt{x}}\right)}{4x\log^4 x} \\
&= \frac{(2\log x - (\log x - 2)(\log x + 4))\frac{\log x}{\sqrt{x}}}{4x\log^4 x} \\
&= \frac{2\log x - (\log^2 x + 4\log x - 2\log x - 8)}{4x\sqrt{x}\log^3 x} \\
&= \frac{-\log^2 x + 8}{4x\sqrt{x}\log^3 x}
\end{aligned}$$

1.7 Concavità

$$f''(x) \geq 0 \iff \frac{-\log^2 x + 8}{4x\sqrt{x}\log^3 x} \geq 0$$

- Numeratore:

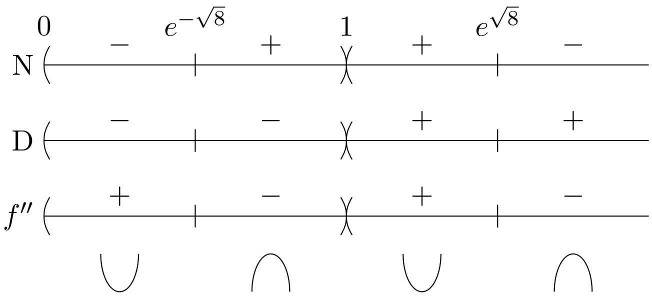
$$\begin{aligned} -\log^2 x + 8 &\geq 0 \\ \log^2 x &\leq 8 \\ |\log x| &\leq \sqrt{8} \\ -\sqrt{8} \leq \log x &\leq \sqrt{8} \\ e^{-\sqrt{8}} \leq \log x &\leq e^{\sqrt{8}} \end{aligned}$$

- Denominatore:

$$4x\sqrt{x}\log^3 x > 0$$

  Nel dominio, $x > 0$, quindi la disequazione diventa:

$$\begin{aligned} \log^3 x &> 0 \\ \log x &> 0 \\ x &> 1 \end{aligned}$$



- f è convessa in $\left(0, e^{-\sqrt{8}}\right)$ e $\left(1, e^{\sqrt{8}}\right)$.
- f è concava in $\left(e^{-\sqrt{8}}, 1\right)$ e $\left(e^{\sqrt{8}}, +\infty\right)$.

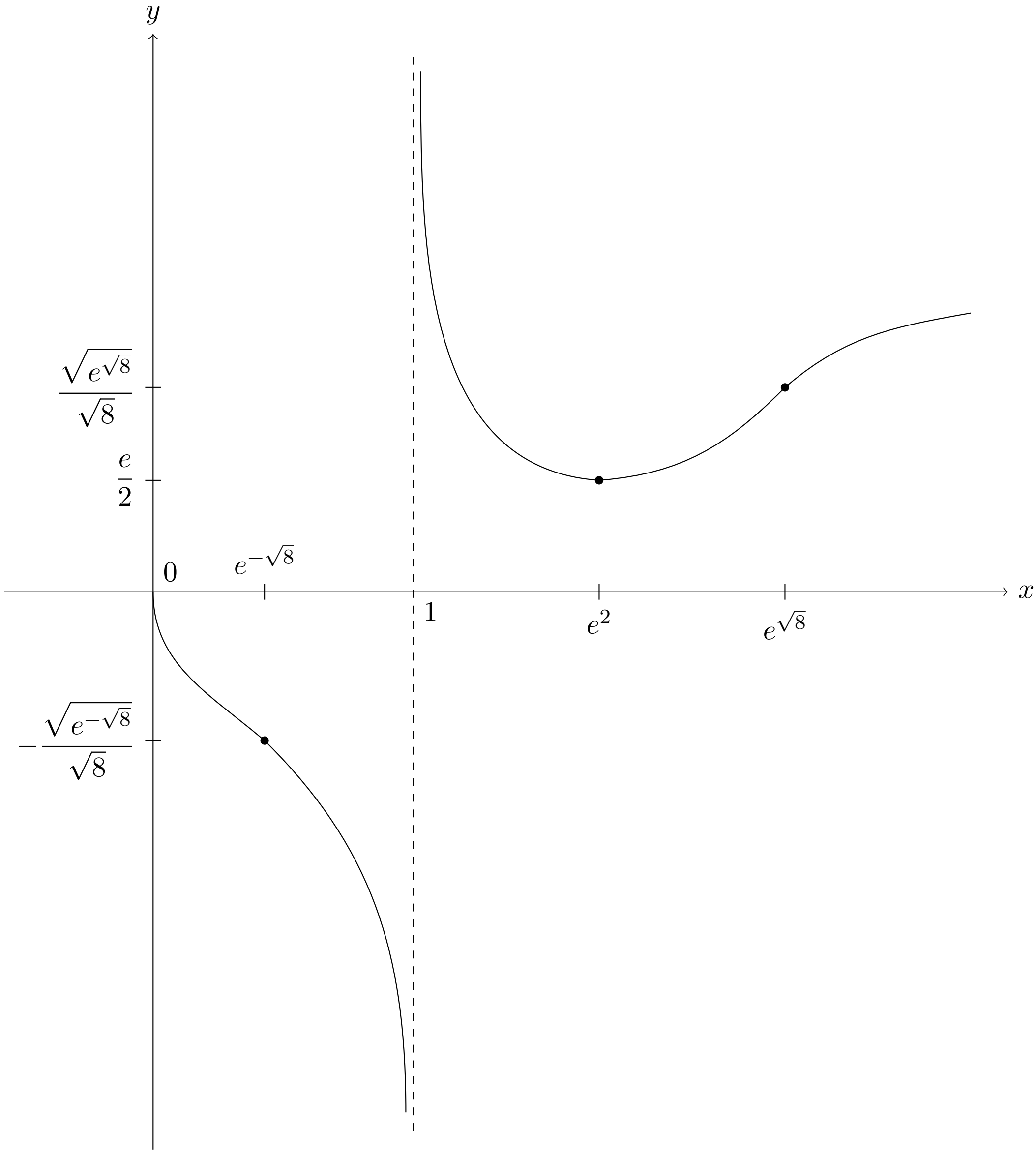
- In $x = e^{-\sqrt{8}}$, f ha un punto di flesso, con

$$f\left(e^{-\sqrt{8}}\right) = \frac{\sqrt{e^{-\sqrt{8}}}}{-\sqrt{8}} = -\frac{\sqrt{e^{-\sqrt{8}}}}{\sqrt{8}}$$

- In $x = e^{\sqrt{8}}$, f ha un punto di flesso, con

$$f\left(e^{\sqrt{8}}\right) = \frac{\sqrt{e^{\sqrt{8}}}}{\sqrt{8}}$$

1.8 Grafico



2 Esempio 2

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x} - x$$

2.1 Dominio

$$x^2 - 4x \geq 0 \iff x(x-4) \geq 0 \iff x \leq 0 \lor x \geq 4$$
$$D = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$$

2.2 Limiti e asintoti

È inutile calcolare i limiti per $x \to 0^-$ e $x \to 4^+$: sono rispettivamente uguali a $f(0)$ e $f(4)$, poiché la funzione è continua e definita in tali punti.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-x\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-x\right)\frac{\sqrt{x^2-4x}+x}{\sqrt{x^2-4x}+x} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x-x^2}{\sqrt{x^2-4x}+x} \\
&= \frac{-4x}{\underbrace{|x|}_{x>0 \implies |x|=x}+x} = \frac{-4x}{2x} = -2
\end{aligned}$$

$y = -2$ è l'asintoto orizzontale a $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-x\right) = +\infty$$

Non esiste un asintoto orizzontale a $-\infty$. Bisogna verificare se esiste invece l'asintoto obliquo:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-4x}-x}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1-\dfrac{4}{x}\right)}-x}{x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{1-\dfrac{4}{x}}-x}{x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{1-\dfrac{4}{x}}-x}{x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \left(-\sqrt{1-\frac{4}{x}}-1\right) \\
&= -2 = m
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-4x}-x+2x\right) &= \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-4x}+x\right) \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-4x-x^2}{\sqrt{x^2-4x}-x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-4x}{|x|-x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \frac{-4x}{-2x} \\
&= 2 = q
\end{aligned}
$$

La retta $y = -2x + 2$ è l'asintoto obliquo a $-\infty$.

2.3 Segno

$$
\begin{aligned}
f(x) &\geq 0 \\
\sqrt{x^2-4x}-x &\geq 0 \\
\sqrt{x^2-4x} &\geq x \\
x \leq 0 \vee &\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-4x \geq x^2 \end{cases} \\
x \leq 0 \vee &\begin{cases} x \geq 0 \\ -4x \geq 0 \end{cases} \\
x \leq 0 \vee &\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 0 \end{cases} \\
x \leq 0 &\vee x = 0 \\
x &\leq 0
\end{aligned}
$$

		0		4	
f	$+$	$]$		$[$	$-$

2.4 Derivata prima

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x^2-4x}-x = (x^2-4x)^{\frac{1}{2}}-x \\
f'(x) &= \frac{1}{2}(x^2-4x)^{-\frac{1}{2}}(2x-4)-1 = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x}}-1 = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}}-1
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}}-1\right) = -\infty \implies \nexists f'_-(0)
$$

In $x=0$, f ha una retta tangente sinistra verticale.

$$
\lim_{x\to 4^+} f'(x) = \lim_{x\to 4^+}\left(\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}}-1\right) = +\infty \implies \nexists f'_+(4)
$$

In $x=4$, f ha una retta tangente destra verticale.

2.5 Monotonia ed estremi

$$
\begin{gathered}
f'(x) \geq 0 \\
\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}} - 1 \geq 0 \\
\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}} \geq 1 \\
x - 2 \geq \sqrt{x^2-4x} \quad \text{perché } \sqrt{x^2-4x} \geq 0 \\
\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 4x \leq x^2 - 4x + 4 \end{cases} \\
\begin{cases} x \geq 2 \\ 0 \leq 4 \quad \text{sempre verificata} \end{cases} \\
x \geq 2
\end{gathered}
$$

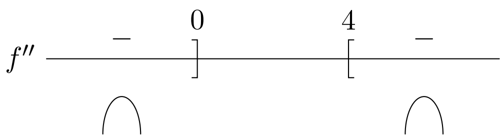
$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & & 0 & & 4 & \\
f' & - &] & & [& + \\
 & \searrow & & & & \nearrow
\end{array}
$$

- f decresce in $(-\infty, 0]$.
- f cresce in $[4, +\infty)$.
- In $x = 0$, f ha un minimo relativo, con $f(0) = 0$.
- In $x = 4$, f ha un minimo assoluto, con $f(4) = -4$.

2.6 Derivata seconda e concavità

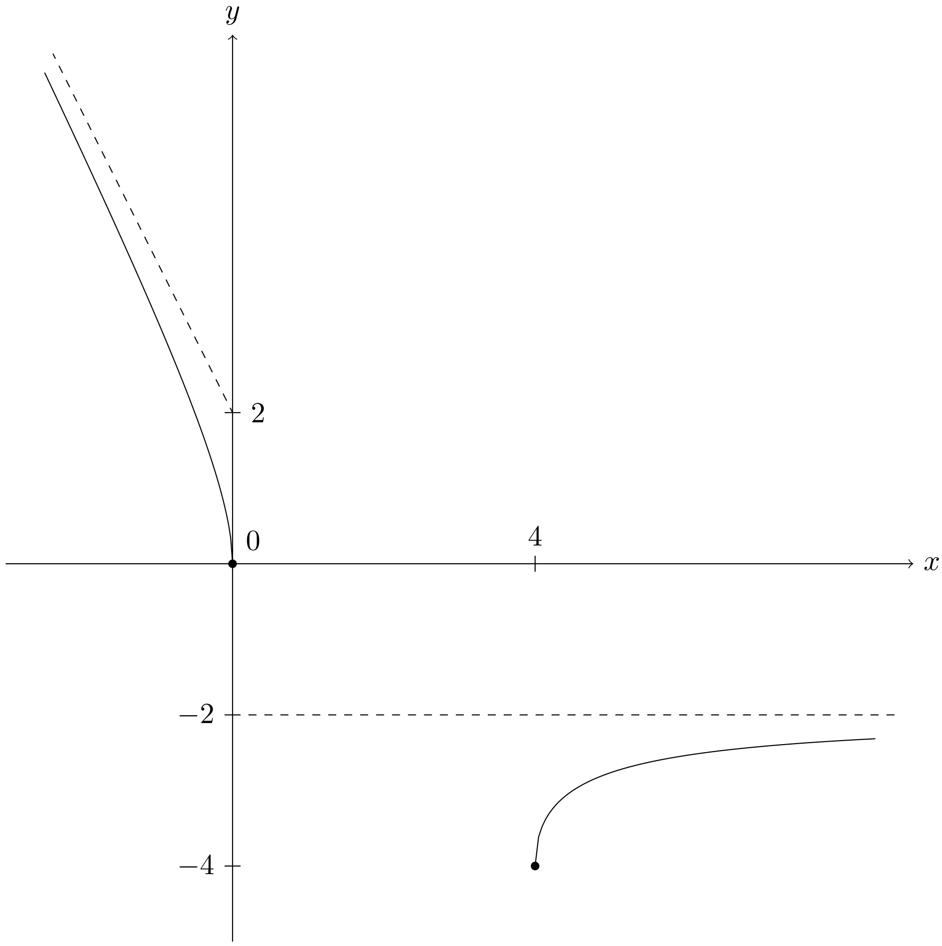
$$
f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}} - 1 = \frac{x-2}{(x^2-4x)^{\frac{1}{2}}}
$$

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{\sqrt{x^2-4x}-(x-2)\cdot\dfrac{1}{2}(x^2-4x)^{-\frac{1}{2}}(2x-4)}{x^2-4x} \\
&= \frac{\sqrt{x^2-4x}-(x-2)\dfrac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x}}}{x^2-4x} \\
&= \frac{\dfrac{x^2-4x}{\sqrt{x^2-4x}}-\dfrac{(x-2)^2}{\sqrt{x^2-4x}}}{x^2-4x} \\
&= \frac{x^2-4x-(x^2-4x+4)}{(x^2-4x)^{\frac{3}{2}}} \\
&= \frac{-4}{(x^2-4x)^{\frac{3}{2}}} < 0
\end{aligned}
$$



- f è concava in $(-\infty, 0]$ e $[4, +\infty)$.
- f non ha punti di flesso.

2.7 Grafico



3 Esempio 3

$$
\begin{aligned}
f(x) &= e^{-|x^2-1|} \\
&= \begin{cases} e^{-(x^2-1)} & \text{se } x^2-1 \geq 0 \\ e^{x^2-1} & \text{se } x^2-1 < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} e^{-(x^2-1)} & \text{se } |x| \geq 1 \\ e^{x^2-1} & \text{se } |x| < 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} e^{-(x^2-1)} & \text{se } x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ e^{x^2-1} & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

f è continua in quanto composizione di funzioni continue.

3.1 Dominio

$$D = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

3.2 Segno

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in D$$

3.3 Limiti e asintoti

$$\lim_{x \to -\infty} e^{-|x^2-1|} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-|x^2-1|} = 0$$

La retta $y = 0$ è asintoto orizzontale, sia a $-\infty$ che a $+\infty$.

3.4 Derivata prima

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x^2-1)} & \text{se } x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ e^{x^2-1} & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x\, e^{-(x^2-1)} & \text{se } x < -1 \vee x > 1 \\ 2x\, e^{x^2-1} & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}$$

Nella derivata, la disuguaglianza $x < -1 \vee x > 1$ è stretta perché i punti di "passaggio tra definizioni" devono essere studiati separatamente:

- Se $x = -1$:

$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = \lim_{x \to -1^-} \left(-2x\, e^{-(x^2-1)} \right) = 2 = f'_-(-1)$$

$$\lim_{x \to -1^+} f'(x) = \lim_{x \to -1^+} \left(2x\, e^{x^2-1} \right) = -2 = f'_+(-1)$$

  In $x = -1$, f ha un punto angoloso, con $f(-1) = 1$.

- Se $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(2x\, e^{x^2-1} \right) = 2 = f'_-(1)$$

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} \left(-2x\, e^{-(x^2-1)} \right) = -2 = f'_+(1)$$

  In $x = 1$, f ha un punto angoloso, con $f(1) = 1$.

3.5 Monotonia ed estremi

$$f'(x) \geq 0$$

$$\begin{cases} -2x\, e^{-(x^2-1)} \geq 0 \\ x < -1 \vee x > 1 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x\, e^{x^2-1} \geq 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x \geq 0 \\ x < -1 \vee x > 1 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x \geq 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ x < -1 \vee x > 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$x < -1 \vee 0 \leq x < 1$$

$$
\begin{array}{lccccccc}
 & & -1 & & 0 & & 1 & \\
f' & + & | & - & | & + & | & - \\
 & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow
\end{array}
$$

- f cresce in $(-\infty, -1)$ e $(0, 1)$.
- f decresce in $(-1, 0)$ e $(1, +\infty)$.
- In $x = -1$ e $x = 1$ (in corrispondenza dei punti angolosi), f ha due massimi globali/assoluti.
- In $x = 0$, f ha un minimo locale/relativo, con $f(0) = \dfrac{1}{e}$.

3.6 Derivata seconda e concavità

$$
f'(x) = \begin{cases} -2x\, e^{-(x^2-1)} & \text{se } x < -1 \vee x > 1 \\ 2x\, e^{x^2-1} & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \begin{cases} -2e^{-(x^2-1)} + 4x^2 e^{-(x^2-1)} & \text{se } x < -1 \vee x > 1 \\ 2e^{x^2-1} + 4x^2 e^{x^2-1} & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} (4x^2 - 2) e^{-(x^2-1)} & \text{se } x < -1 \vee x > 1 \\ (4x^2 + 2) e^{x^2-1} & \text{se } -1 < x < 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$f''(x) \geq 0$$

$$\begin{cases} (4x^2-2)e^{-x^2-1} \geq 0 \\ x < -1 \vee x > 1 \end{cases} \vee \begin{cases} (4x^2+2)e^{x^2-1} \geq 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$$

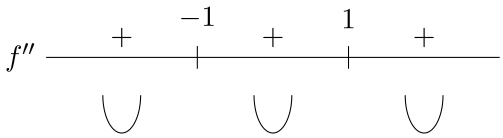
$$\begin{cases} 4x^2-2 \geq 0 \\ x < -1 \vee x > 1 \end{cases} \vee \begin{cases} 4x^2+2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ -1 < x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 \geq \dfrac{1}{2} \\ x < -1 \vee x > 1 \end{cases} \vee \quad -1 < x < 1$$

$$\begin{cases} |x| \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x < -1 \vee x > 1 \end{cases} \vee \quad -1 < x < 1$$

$$\begin{cases} x \leq -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \vee x \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x < -1 \vee x > 1 \end{cases} \vee \quad -1 < x < 1$$

$$x < -1 \vee x > 1 \vee -1 < x < 1$$



- f è convessa in $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ e $(1,+\infty)$.
- f non ha punti di flesso.

3.7 Grafico