Azzolini Riccardo 2018-10-16

Principio di induzione

1 Notazione per operazioni su più elementi

- **Sommatoria**

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

Si legge "somma degli a_i con i che va da 1 a n".

  - i è la variabile *vincolata* o *muta*.
  - n è la variabile *libera*.
  - Gli a_i sono gli addendi della somma.

- **Produttoria**

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$$

- Unione

$$\bigcup_{i=1}^{n} X_i = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n$$

- Altre operazioni (intersezione, ecc.)

2 Principio di induzione

È un metodo di dimostrare di proprietà che valgono per tutti i numeri naturali (a partire da un certo punto in poi). Si basa sulla proprietà fondamentale dei numeri naturali di poter essere costruiti a partire dallo 0 e dalla funzione successore ($S(n) = n + 1$).

Data una proprietà $P(n)$ che dipende dalla variabile naturale n, per dimostrare che essa è vera per ogni $n \geq n_0$ ($n_0 \in \mathbb{N}$) è sufficiente:

1. **base di induzione**: dimostrare che $P(n_0)$ è vera
2. **passo di induzione**: supponendo che per un generico $m \geq n_0$ sia vera $P(m)$ (**ipotesi di induzione**), dimostrare che allora è vera anche $P(m + 1)$

2.1 Esempio 1

Si vuole dimostrare che

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

per ogni $n \geq 1$.

1. Base di induzione

$$n = 1$$
$$\sum_{i=1}^{1} i = 1$$
$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$
$$\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2}$$

2. Passo di induzione
   a) Ipotesi di induzione: si suppone che l'uguaglianza valga per m

$$\sum_{i=1}^{m} i = \frac{m(m+1)}{2}$$

b) Bisogna quindi dimostrare:

$$\sum_{i=1}^{m+1} i = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

c) Innanzitutto si osserva che passare da m a $m+1$ corrisponde ad aggiungere alla somma l'addendo $m+1$:

$$\sum_{i=1}^{m+1} i = \sum_{i=1}^{m} i + (m+1)$$

d) Per ipotesi di induzione:

$$\sum_{i=1}^{m+1} i = \frac{m(m+1)}{2} + (m+1) = \frac{m(m+1)+2(m+1)}{2} = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} i = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$$

2.2 Esempio 2

Si vuole dimostrare che

$$\sum_{i=0}^{n} (2i+1) = (n+1)^2$$

per ogni $n \geq 0$.

Nota: $2i+1$ è la forma generale di un numero dispari.

1. Base di induzione

$$n = 0$$
$$\sum_{i=0}^{0} (2i+1) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$
$$(n+1)^2 = (0+1)^2 = 1$$
$$\sum_{i=0}^{0} (2i+1) = (0+1)^2$$

2. Passo di induzione

    a) Ipotesi di induzione:

$$\sum_{i=0}^{m}(2i+1) = (m+1)^2$$

    b) Bisogna quindi dimostrare:

$$\sum_{i=0}^{m+1}(2i+1) = (m+2)^2$$

    c) Dimostrazione:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{m+1}(2i+1) &= \sum_{i=0}^{m}(2i+1) + (2(m+1)+1) = (m+1)^2 + (2m+3) \\ &= m^2 + 2m + 1 + 2m + 3 = m^2 + 4m + 4 = (m+2)^2\end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^{m+1}(2i+1) = (m+2)^2$$

2.3 Esempio 3

Si vuole dimostrare che per ogni $n \geq 1$, $5^n - 1$ è un multiplo di 4.

1. Base di induzione

$$n = 1$$
$$5^n - 1 = 5^1 - 1 = 4 \text{ è un multiplo di } 4$$

2. Passo di induzione

    a) Ipotesi di induzione:

$$5^m - 1 = 4h \quad \text{dove } h \in \mathbb{Z}$$
$$5^m = 4h + 1$$

b) Bisogna quindi dimostrare:

$$5^{m+1} - 1 = 4k \quad \text{dove } k \in \mathbb{Z}$$

c) Dimostrazione:

$$5^{m+1} - 1 = 5 \cdot 5^m - 1 = 5(4h+1) - 1 = 20h + 5 - 1 = 20h - 4 = 4(5h-1)$$

$$5^{m+1} - 1 = 4k \quad (\text{con } k = 5h - 1)$$