Azzolini Riccardo 2020-05-29

Tableaux del primo ordine: validità

1 Tableaux chiusi

Definizione: Una coppia di formule $\varphi, \neg\varphi$ si dice **complementare**.

Come dimostrato per il caso proposizionale, un insieme di formule che contiene una coppia complementare non è soddisfacibile.

Definizione: Un tableau è **chiuso** se non ha rami infiniti e tutte le etichette delle foglie (gli insiemi di formule associati alle foglie) contengono una coppia complementare.

2 Teorema di validità – lemma principale

Lemma (le regole di $\mathrm{T_{CFO}}$ preservano la soddisfacibilità): Per ogni (istanza di) regola $\mathcal{R}$ di $\mathrm{T_{CFO}}$, se la premessa di $\mathcal{R}$ è soddisfacibile, allora almeno una delle conclusioni è soddisfacibile.

Dimostrazione: I casi di $\neg\neg$, α-regole e β-regole sono del tutto analoghi alla dimostrazione data per la logica proposizionale (con la differenza che si usano le coppie modello–assegnamento al posto delle valutazioni). I casi "interessanti" sono invece quelli di γ-regole e δ-regole.

- *Caso delle γ-regole*: Sia $\varphi = \forall x A$ (il caso $\varphi = \neg\exists x A$ è analogo), e sia $\psi = A[c/x]$ un suo ridotto, dove c è una qualunque costante del linguaggio.

  Dati un modello $\mathcal{M} = (D, I)$ e un assegnamento e tali che $(\mathcal{M}, e) \models \Gamma \cup \{\forall x A\}$, si ha per definizione che:

  $$(\mathcal{M}, e) \models \forall x A \iff \widetilde{\forall} d \in D \quad (\mathcal{M}, e[d/x]) \models A$$

  Siccome c è una costante del linguaggio, essa deve essere interpretata dal modello, e per definizione $I(c) \in D$, quindi A è vera anche per $d = I(c)$:

  $$\begin{aligned} &\implies (\mathcal{M}, e[I(c)/x]) \models A \\ &\implies (\mathcal{M}, e) \models A[c/x] \end{aligned}$$

  Così, dalla soddisfacibilità della premessa si è dedotta la soddisfacibilità della conclusione, $(\mathcal{M}, e) \models \Gamma \cup \{\forall x A, A[c/x]\}$, e perciò la regola preserva la soddisfacibilità.

- *Caso delle δ-regole*: Sia $\varphi = \exists x A$ (il caso $\varphi = \neg\forall x A$ è analogo), e sia $\psi = A[a/x]$ un suo ridotto, dove a è una costante che non compare né in Γ né in φ.

  Si suppone che la premessa della regola sia soddisfatta da una coppia di modello $\mathcal{M} = (D, I)$ e assegnamento e: $(\mathcal{M}, e) \models \Gamma \cup \{\exists x A\}$. Per definizione, ciò significa che:
  $$(\mathcal{M}, e) \models \exists x A \iff \widetilde{\exists} d \in D \quad (\mathcal{M}, e[d/x]) \models A$$
  Siccome a è una costante nuova, essa non compare nell'alfabeto A per cui è stato definito il modello $\mathcal{M}$, dunque l'interpretazione I non si esprime ("non dice nulla") rispetto ad a.

  Si consideri adesso l'alfabeto A$'$, ottenuto aggiungendo ad A la costante a, e il modello $\mathcal{M}' = (D, I')$ (per A$'$) in cui I' estende I interpretando a come $I'(a) = d$ (dove d è l'elemento del dominio per cui risulta vera la formula A). Allora:
  $$(\mathcal{M}, e[d/x]) \models A \implies (\mathcal{M}', e) \models A[a/x]$$
  Dato che in Γ non compare a, i due modelli $\mathcal{M}$ e $\mathcal{M}'$ si comportano allo stesso modo su tale insieme,
  $$(\mathcal{M}, e) \models \Gamma \implies (\mathcal{M}', e) \models \Gamma$$
  quindi $(\mathcal{M}', e) \models \Gamma \cup \{A[a/x]\}$: dalla soddisfacibilità della premessa si è dedotta la soddisfacibilità della conclusione.

3 Teorema di validità

Teorema (di validità o correttezza di $\mathrm{T_{CFO}}$): Se esiste un tableau chiuso per Γ, allora Γ è insoddisfacibile.

Dimostrazione: Sia $\mathcal{T}$ un tableau chiuso per Γ. Esattamente come nel caso proposizionale, si dimostra che, per ogni nodo N di $\mathcal{T}$, l'insieme Γ_N è insoddisfacibile: dunque, anche l'insieme associato alla radice di $\mathcal{T}$, cioè Γ, è insoddisfacibile.

La dimostrazione procede per induzione sull'altezza $h(N)$ di un nodo N in $\mathcal{T}$,
$$h(N) = \begin{cases} 0 & \text{se } N \text{ è una foglia di } \mathcal{T} \\ h(N') + 1 & \text{se } N \text{ ha un solo figlio } N' \\ \max\{h(N'), h(N'')\} + 1 & \text{se } N \text{ ha due figli } N', N'' \end{cases}$$
ed è assolutamente identica al caso proposizionale.

Osservazione: $h(N)$ è ben definita in quanto ogni ramo ha una foglia, dato che, per definizione, un tableau chiuso non ha rami infiniti.

3.1 Corollario: formule valide

Corollario: Se esiste un tableau chiuso per $\neg\varphi$, allora φ è valida.

Come al solito, la dimostrazione si basa sul fatto che φ è valida se e solo se $\neg\varphi$ è insoddisfacibile, e sul teorema precedente.

3.1.1 Esempio

Siano

$$H = \exists x R(a, x) \qquad F = \forall x(\exists y R(y, x) \to \neg P(x)) \qquad G = \exists x \neg P(x)$$

Per mostrare che la formula $H \wedge F \to G$ è valida, si costruisce il seguente tableau chiuso per la sua negazione:

$$\begin{array}{c}
\neg(H \wedge F \to G) \\
\big|\ {\scriptstyle \neg\to} \\
H \wedge F, \neg G \\
\big|\ {\scriptstyle \wedge} \\
H, F, \neg G \\
\big|\ {\scriptstyle \exists} \\
R(a, b), F, \neg G \\
\big|\ {\scriptstyle \forall} \\
R(a, b), F, \exists y R(y, b) \to \neg P(b), \neg G \\
\swarrow \qquad \searrow {\scriptstyle \to}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
R(a, b), F, \neg\exists y R(y, b), \neg G & R(a, b), F, \neg P(b), \neg G \\
\big|\ {\scriptstyle \neg\exists} & \big|\ {\scriptstyle \neg\exists} \\
\textcolor{red}{R(a, b)}, F, \neg\exists y R(y, b), \textcolor{red}{\neg R(a, b)}, \neg G & R(a, b), F, \textcolor{red}{\neg P(b)}, \neg G, \textcolor{red}{\neg\neg P(b)}
\end{array}$$