Azzolini Riccardo 2020-05-18

Sintassi della logica classica del primo ordine

1 Alfabeto

Definizione: Un linguaggio del primo ordine è definito da un **alfabeto** A, costituito da:

- un insieme infinito VAR di **simboli di variabile** $x, y, z, \ldots$;
- un insieme di **simboli di costante** $a, b, \ldots, c_1, c_2, \ldots$;
- un insieme di **simboli di funzione** $f, g, h, \ldots, f_1, f_2, \ldots, g_1, g_2, \ldots$, ognuno con associata la sua *arietà* (numero di argomenti);
- un insieme di **simboli di predicato** $A, B, \ldots, P, P_1, P_2, \ldots, Q, Q_1, Q_2, \ldots$, ognuno con associata la sua arietà.

Osservazioni:

- Quando si costruiranno delle formule, si sceglierà l'alfabeto sulla base del mondo che si vorrà modellare: in un certo senso, i simboli che compaiono nell'alfabeto sono ciò che crea la corrispondenza tra il linguaggio formale e gli elementi del mondo considerato. Infatti, gli alfabeti sono costituiti da una parte fissa, l'insieme dei simboli di variabile, e da tre parti dipendenti dal dominio: i simboli di costante, di funzione e di predicato.
- Le variabili della logica del primo ordine indicano elementi del dominio, diversamente dalle variabili proposizionali, che rappresentano formule (atomiche).
- Formalmente, un alfabeto è composto da *simboli* di variabile, costante, funzione e predicato. In pratica, per semplicità, spesso si parlerà di *variabili*, *costanti*, *funzioni* e *predicati* (omettendo "simbolo di").
- In ambito informatico, quando si utilizza la logica per formalizzare dei problemi, spesso un alfabeto viene chiamato *segnatura*.

2 Simboli logici

Un'altra parte fissa del linguaggio, usata insieme all'alfabeto (che specifica il "lessico" di base) per costruire le formule, sono i simboli logici:

Definizione: I **simboli logici** utilizzati da un linguaggio del primo ordine sono:

- i **connettivi proposizionali**: $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$;
- i **quantificatori**: $\forall, \exists$;
- le parentesi: "(", ")".

Nella logica del *primo ordine*, i quantificatori agiscono sulle variabili individuali. Invece, nelle logiche di ordini superiori la quantificazione può avvenire su elementi più complessi: ad esempio, nella logica del secondo ordine, i quantificatori agiscono sui predicati (che rappresentano sostanzialmente insiemi di elementi del dominio).

3 Termini

Definizione: L'insieme *TERM* dei **termini** (su un alfabeto A) è così definito:

- ogni simbolo di variabile è un termine;
- ogni simbolo di costante (di A) è un termine;
- se f è un simbolo di funzione (di A) di arietà n, e $t_1, \dots, t_n$ sono termini, allora anche $f(t_1, \dots, t_n)$ è un termine.

Un simbolo di funzione o di predicato di arietà n si dice n-ario. Quando necessario, per indicare esplicitamente che l'arietà di una funzione f o di un predicato P è n, si useranno le notazioni $f^{(n)}$ e $P^{(n)}$.

3.1 Esempo

Siano $f^{(2)}, g^{(1)}$ delle funzioni, c, d delle costanti e x, y delle variabili. Allora, i seguenti sono esempi di termini:

- c e d;
- x e y;
- $g(c)$, $g(d)$, $g(x)$ e $g(y)$;
- $f(c, c)$, $f(c, d)$, $f(x, x)$, $f(y, x)$, $f(x, c)$, $f(d, y)$;
- $g(g(x))$, $g(f(g(x), c))$;
- $f(g(f(g(x), c)), y)$, $g(f(x, g(f(c, g(y)))))$.

3.2 Altro esempio: numeri naturali

Si consideri il linguaggio che rappresenta i numeri naturali e le operazioni su di essi. Il suo alfabeto contiene:

- il simbolo di costante 0;
- i simboli di funzione $s^{(1)}$,[1] $+^{(2)}$, $-^{(2)}$, $*^{(2)}$ e $/^{(2)}$.

I seguenti sono esempi di termini su tale alfabeto:

- 0, $s(0)$, $s(s(0))$;
- x e $s(y)$;
- $+(x, 0)$, $*(s(0), s(s(0)))$;
- $/(+(s(0), y), +(0, s(s(x))))$.

4 Formule

Definizione: L'insieme *FORM* delle formule del primo ordine (su un alfabeto A) è così definito:

- Se P è un simbolo di predicato (di A) n-ario, e $t_1, \dots, t_n$ sono termini (su A), allora
$$P(t_1, \dots, t_n)$$
è una formula, chiamata **formula atomica**.
- Se φ_1, φ_2 sono formule, allora sono formule anche:
$$(\neg\varphi_1) \quad (\varphi_1 \land \varphi_2) \quad (\varphi_1 \lor \varphi_2) \quad (\varphi_1 \to \varphi_2)$$
- Se φ è una formula e x è una variabile, allora sono formule anche:
$$(\forall x\varphi) \quad (\exists x\varphi)$$

[1] s rappresenta la funzione unaria "successore", che associa a ciascun numero naturale quello successivo. Essa permette di costruire tutti i numeri naturali senza introdurre un simbolo di costante per ciascuno di essi: $s(0)$ rappresenta l'1, $s(s(0))$ rappresenta il 2, ecc.

4.1 Osservazioni ed esempi

- Quando si scrive una formula, bisognerebbe specificare i simboli che vi compaiono e il loro numero di argomenti, ma, di solito, queste informazioni sono chiare dal modo in cui tali simboli vengono utilizzati.

  Ad esempio, nella seguente formula:

  $$\exists x(A(x, y) \wedge \forall y B(y))$$

  - Siccome $A(x, y)$ compare come primo argomento di una congiunzione, deve essere una formula, dunque A è un simbolo di predicato (e non di funzione), ed è binario in quanto applicato a due argomenti.
  - Anche B è un simbolo di predicato, perché il quantificatore $\forall$ si applica a una variabile e a una formula, quindi, in $\forall y B(y)$, $B(y)$ è sicuramente una formula. Siccome è applicato a un argomento, B è un predicato unario.
  - x e y appaiono sotto un quantificatore, quindi devono essere simboli di variabile.

  La struttura sintattica di questa formula può essere mostrata esplicitamente costruendone il parsing tree (albero di parsing):

  $$\begin{array}{ccc}
  & \exists x(A(x, y) \wedge \forall y B(y)) & \\
  & | & \\
  & A(x, y) \wedge \forall y B(y) & \\
  \diagup & & \diagdown \\
  A(x, y) & & \forall y B(y) \\
  & & | \\
  & & B(y)
  \end{array}$$

  Osservazione: Nel parsing tree di una formula, le foglie sono formule atomiche, cioè le formule più piccole che si possono considerare.

- Nelle formule atomiche compare un solo predicato, applicato a dei termini, ma i termini non hanno limiti di lunghezza.

  Ad esempio, la formula

  $$\forall x A(f(g(x), c), g(f(x, c))) \wedge \exists y B(f(c, g(y)))$$

  (nella quale compaiono i predicati $A^{(2)}, B^{(1)}$, le funzioni $f^{(2)}, g^{(1)}$ e la costante c) ha il seguente parsing tree:

$$\forall x A(f(g(x), c), g(f(x, c))) \wedge \exists y B(f(c, g(y)))$$

$$\forall x A(f(g(x), c), g(f(x, c))) \qquad \exists y B(f(c, g(y)))$$

$$A(f(g(x), c), g(f(x, c))) \qquad B(f(c, g(y)))$$

4.2 Precedenze e parentesi

Anche nel caso della logica del primo ordine, per evitare di scrivere parentesi ridondanti, si adottano le stesse considerazioni sulla gerarchia dei connettivi fatte per la logica proposizionale. Inoltre, si stabilisce che i quantificatori hanno precedenza più alta rispetto agli altri connettivi (binari).

Ad esempio, la formula

$$\forall x A(x) \to B(x)$$

è da intendersi come

$$(\forall x A(x)) \to B(x)$$

4.3 Esempio: numeri naturali

Si consideri di nuovo un linguaggio relativo ai numeri naturali, il cui alfabeto contiene:

- il simbolo di costante 0;
- i simboli di funzione $s^{(1)}$, $+^{(2)}$, $-^{(2)}$, $*^{(2)}$, $/^{(2)}$;
- i simboli di predicato $=^{(2)}$, $\mathit{pari}^{(1)}$, $\mathit{dispari}^{(1)}$.

Alcuni esempi di formule di questo linguaggio sono:

- $=(0, 0)$, $=(x, s(0))$, $\mathit{pari}(s(s(0)))$, $\mathit{pari}(*(x, s(s(y)))$, che sono formule atomiche;
- $\forall x(\mathit{pari}(x) \to \mathit{dispari}(+(x, s(0))))$
- $\forall x(\mathit{pari}(x) \to \exists y{=}(x, *(y, s(s(0)))))$

5 Sottoformule

Definizione: Data una formula φ, il suo **insieme delle sottoformule** $\mathrm{Sub}(\varphi)$ è definito nel seguente modo:

$$\mathrm{Sub}(\varphi) = \begin{cases} \{\varphi\} & \text{se } \varphi = P(t_1, \ldots, t_n) \text{ è atomica} \\ \{\varphi\} \cup \mathrm{Sub}(\psi) & \text{se } \varphi = \neg\psi \\ \{\varphi\} \cup \mathrm{Sub}(\psi_1) \cup \mathrm{Sub}(\psi_2) & \text{se } \varphi = \psi_1 * \psi_2 \text{ con } * \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\} \\ \{\varphi\} \cup \mathrm{Sub}(\psi) & \text{se } \varphi = \forall x\psi \text{ o } \varphi = \exists x\psi \end{cases}$$

In questa definizione, le formule ψ, ψ_1, ψ_2 vengono chiamate **sottoformule immediate** (o **principali**) della formula φ.

Osservazione: $\mathrm{Sub}(\varphi)$ è definito per induzione sulla struttura della formula φ. Tale definizione induttiva verrà sfruttata nelle dimostrazioni per induzione strutturale, come si è fatto per la logica proposizionale.

6 Definizioni relative ai quantificatori

- Nelle formule $\forall x\varphi$ ed $\exists x\varphi$, la formula φ si chiama **campo d'azione** del quantificatore.
- Se x è una variabile, $\forall x$ ed $\exists x$ sono chiamati x-*quantificatori* (per mettere in evidenza il fatto che essi agiscono, appunto, sulla variabile x).
- Un'occorrenza di variabile x è **legata** (o **vincolata**) se appare nel campo d'azione di un x-quantificatore, altrimenti si dice **libera**.
- Una formula che non contiene occorrenze di variabili libere si dice **formula chiusa** (o **sentenza**).

6.1 Esempio

Si consideri la formula

$$\forall x(P(x, y) \rightarrow \exists yR(x, f(y)))$$

- tutte le occorrenze della variabile x sono vincolate;
- la prima occorrenza della variabile y è libera;
- la seconda occorrenza della variabile y è vincolata (in particolare, considerando solo la sottoformula $\exists yR(x, f(y))$, la variabile y è legata, mentre x è libera).

7 Variabili libere di un termine

Definizione: L'insieme $\mathrm{FV}(t)$ delle variabili libere di un termine t è definito come segue:

$$\mathrm{FV}(t) = \begin{cases} \varnothing & \text{se } t = c \text{ con } c \text{ simbolo di costante} \\ \{x\} & \text{se } t = x \in VAR \\ \mathrm{FV}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{FV}(t_n) & \text{se } t = f(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

Osservazione: Tutte le variabili in un termine sono libere, perché nei termini non si ha alcun meccanismo per legare le variabili. Dunque, un termine t è *chiuso*, $\mathrm{FV}(t) = \varnothing$, se e solo se non contiene variabili (allora, può essere una costante, oppure un'applicazione di funzione a termini che non contengono a loro volta variabili).

8 Variabili libere di una formula

Definizione: L'insieme $\mathrm{FV}(\varphi)$ delle variabili libere di una formula φ è definito come segue:

$$\mathrm{FV}(\varphi) = \begin{cases} \mathrm{FV}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{FV}(t_n) & \text{se } \varphi = P(t_1, \ldots, t_n) \text{ è atomica} \\ \mathrm{FV}(\psi) & \text{se } \varphi = \neg\psi \\ \mathrm{FV}(\psi_1) \cup \mathrm{FV}(\psi_2) & \text{se } \varphi = \psi_1 * \psi_2 \text{ con } * \in \{\wedge, \vee, \to\} \\ \mathrm{FV}(\psi) \setminus \{x\} & \text{se } \varphi = \forall x\psi \text{ o } \varphi = \exists x\psi \end{cases}$$

Una formula φ è chiusa se e solo se $\mathrm{FV}(\varphi) = \varnothing$.

Osservazione: A differenza dei termini, una formula chiusa può contenere variabili, purché siano vincolate.

8.1 Esempio

Sia

$$\varphi = \forall x\underbrace{(\underbrace{\exists y(\underbrace{A(x,y) \to A(x,c)}_{\gamma_1})}_{\theta_1} \wedge \underbrace{\forall z(\underbrace{A(y,z) \vee \neg B(x, f(z))}_{\gamma_2})}_{\theta_2})}_{\psi}$$

con c simbolo di costante. Allora:

$$\begin{aligned}
\mathrm{FV}(\varphi) &= \mathrm{FV}(\psi) \setminus \{x\} \\
&= (\mathrm{FV}(\theta_1) \cup \mathrm{FV}(\theta_2)) \setminus \{x\} \\
&= ((\mathrm{FV}(\gamma_1) \setminus \{y\}) \cup (\mathrm{FV}(\gamma_2) \setminus \{z\})) \setminus \{x\} \\
&= ((\{x, y\} \setminus \{y\}) \cup (\{y, z, x\} \setminus \{z\})) \setminus \{x\} \\
&= (\{x\} \cup \{y, x\}) \setminus \{x\} \\
&= \{x, y\} \setminus \{x\} \\
&= \{y\}
\end{aligned}$$

Osservazione: Una variabile può essere libera anche se alcune delle sue occorrenze sono vincolate.