Azzolini Riccardo 2018-12-07

Applicazioni lineari

1 Iniettività e suriettività

Un'applicazione lineare $f : U \to V$ è

- *iniettiva* se e solo se $\operatorname{Ker} f = \{0_U\}$
- *suriettiva* se e solo se $\operatorname{Im} f = V$

1.1 Esempio

$$f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x + y, 2z) \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} f &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = (0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x + y, 2z) = (0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0,\ \ 2z = 0\}\end{aligned}$$

Quindi gli elementi del nucleo sono le soluzioni del sistema omogeneo:

$$\begin{cases} x + y \quad = 0 \\ \qquad 2z = 0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{rg} A = 2$$

Il sistema ha ∞^1 soluzioni:

$$\begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\operatorname{Ker} f = \{(-y, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

- $\dim \operatorname{Ker} f = 1$
- $\{(-1, 1, 0)\}$ è una base di $\operatorname{Ker} f$

Di conseguenza, la dimensione dell'immagine è:

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker} f = 3 - 1 = 2$$

Infatti:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} f &= \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \exists u \in \mathbb{R}^3,\ \ f(u) = v\} \\
&= \{(a, b) \mid \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \ f(x, y, z) = (a, b)\} \\
&= \{(a, b) \mid \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \ (x + y, 2z) = (a, b)\} \\
&= \{(x + y, 2z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

Ogni vettore $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ può essere scritto come $(x + y, 2z)$, ad esempio ponendo $x = a$, $y = 0$ e $z = \frac{b}{2}$, quindi $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$.

L'applicazione lineare f:

- non è iniettiva perché $\operatorname{Ker} f \neq \{(0, 0, 0)\}$
- è suriettiva perché $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$

2 Matrice associata

Se:

- $f : U \to V$ è un'applicazione lineare
- $B = \{b_j \mid j = 1, \dots, n\}$ è una base di U (quindi $\dim U = n$)
- $B' = \{b'_i \mid i = 1, \dots, m\}$ è una base di V (quindi $\dim V = m$)

allora $f(b_j) \in V$, quindi $f(b_j)$ è una combinazione lineare di B', cioè esistono degli scalari a_{ij} tali che:

$$f(b_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot b'_i$$

$A = (a_{ij})$ è allora la **matrice associata** a f nelle basi B e B' (se esse non sono specificate, si sottintendono quelle canoniche): nella j-esima colonna, essa contiene i coefficienti per scrivere $f(b_j)$ in base B'.

Se si moltiplica la matrice associata A per un vettore colonna $u \in U$, rappresentato in base B, si ottiene la rappresentazione in base B' di $f(u)$:

$$A \cdot u_B = f(u)_{B'}$$

2.1 Esempi

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2y + x, x) \in \mathbb{R}^2$$
$$B = B' = \{(1, 0), (0, 1)\} \quad \text{base canonica}$$

$$f(b_1) = a_{11}(1, 0) + a_{21}(0, 1)$$
$$f(b_1) = f(1, 0) = (1, 1) = 1(1, 0) + 1(0, 1)$$

$$f(b_2) = a_{12}(1, 0) + a_{22}(0, 1)$$
$$f(b_2) = f(0, 1) = (2, 0) = 2(1, 0) + 0(0, 1)$$

La matrice associata a f nelle basi canoniche è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad g(x, y, z) = (x + y, z)$$
$$B = E_3 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$
$$B' = \{(1, 2), (0, 1)\}$$

$$g(1, 0, 0) = (1, 0) = 1(1, 2) - 2(0, 1)$$
$$g(0, 1, 0) = (1, 0) = 1(1, 2) - 2(0, 1)$$
$$g(0, 0, 1) = (0, 1) = 0(1, 2) + 1(1, 0)$$

La matrice associata a g nelle basi B e B' è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dato un vettore $v = (2, 3, 4) \in \mathbb{R}^3$:

$$f(v) = (5, 4) = 5(1, 2) - 6(0, 1)$$

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

dove $\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ sono i coefficienti di $f(v)$ nella base B'.

2.2 Matrice associata nelle basi canoniche

Data l'applicazione lineare $f : u \in \mathbb{R}^n \mapsto v \in \mathbb{R}^m$, con $u = (x_1, \dots, x_n)$ e

$$v = (y_1, \dots, y_m) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

la matrice associata a f nelle basi canoniche si può ricavare direttamente, considerando solo i coefficienti di $x_1, \dots, x_n$ nella formula di v, scritto come vettore colonna.

Al contrario, eseguendo il prodotto righe per colonne tra la matrice associata e il vettore colonna generico $(x_1, \dots, x_n)$, si può ricavare la formula di v:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

2.2.1 Esempio

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (x + y, y, 2x + y) \in \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x + y \\ y \\ 2x + y \end{pmatrix} \implies A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ y \\ 2x + y \end{pmatrix}$$

3 Matrice associata e dimensioni

Se $f : U \to V$ è un'applicazione lineare e A è la sua matrice associata in basi qualsiasi, allora:

$$\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} A$$

e quindi anche:

$$\dim \operatorname{Ker} f = \dim U - \operatorname{rg} A$$

3.1 Esempio

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2y, x) \in \mathbb{R}^2$$

Nelle basi canoniche:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{rg} A = 2$$
$$\dim \operatorname{Im} f = 2 \qquad \dim \operatorname{Ker} f = 2 - 2 = 0$$

L'unico sottospazio di $\mathbb{R}^2$ con dimensione 2 è $\mathbb{R}^2$ stesso, quindi $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ è l'applicazione è suriettiva.

Analogamente, $\operatorname{Ker} f = \{(0, 0)\}$ (l'unico sottospazio di $\mathbb{R}^2$ con dimensione 0), quindi f è iniettiva.

4 Applicazioni lineari e sottospazi

Le applicazioni lineari trasformano sottospazi in sottospazi (non necessariamente della stessa dimensione).

4.1 Esempio

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (2y, x) \in \mathbb{R}^2$$

$$V = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \quad \text{sottospazio di } \mathbb{R}^2$$

$$f(x, x) = (2x, x)$$
$$f(V) = \{(2x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \quad \text{sottospazio di } \mathbb{R}^2$$