Azzolini Riccardo 2020-05-19

Semantica della logica classica del primo ordine

1 Semantica

Per interpretare (attribuire valori di verità) una formula della logica dei predicati, servono molte più informazioni rispetto a quelle necessarie nella logica proposizionale.

Infatti, una formula atomica $P(t_1, \dots, t_n)$ può assumere un valore vero o falso a seconda dei termini che vi compaiono, i quali non sono veri o falsi, ma prendono valori in un certo contesto di riferimento.

A loro volta, i termini dipendono da simboli di costante, variabile e funzione, a cui bisogna attribuire un significato.

1.1 Esempio

Si consideri la formula $\forall x P(x)$. Per dire se sia vera o falsa, bisogna *interpretare* P, specificando il *contesto* in cui tale proprietà è espressa (ovvero l'insieme su cui varia la variabile quantificata x) e il suo significato in tale contesto.

- Si potrebbe ad esempio interpretare la formula nel contesto dei numeri naturali, facendo quindi variare x su tutti i numeri naturali, e attribuendo al predicato $P(x)$ il significato "il numero x è pari".

  In questo contesto, la formula significa "tutti i numeri naturali sono pari", dunque è falsa.

- Si potrebbe invece interpretare la formula nel contesto zoologico (nel quale x varia su tutti gli animali), attribuendo a $P(x)$ il significato "l'animale x respira".

  In questo contesto, la formula viene letta come "tutti gli animali respirano", e risulta allora vera.

2 Modelli

Il contesto di interpretazione per la logica del primo ordine è formalizzato dalla nozione di **modello** (o **struttura**).

Definizione: Un **modello** (per un alfabeto A[1]) è una coppia $\mathcal{A} = (D, I)$ in cui:

- D è un insieme qualsiasi, detto **dominio**;
- I è una funzione, chiamata **funzione di interpretazione**, che associa un significato ai simboli di costante, funzione e predicato (di A) nel modo seguente:
  - se c è una costante, allora $I(c) \in D$ (il significato di un simbolo di costante è un elemento del dominio);
  - se f è una funzione n-aria, allora $I(f) : D^n \to D$ (il significato di un simbolo di funzione n-ario è una funzione n-aria sul dominio);
  - se P è un predicato n-ario, allora $I(P) \subseteq D^n$ (il significato di un simbolo di predicato n-ario è una relazione n-aria sul dominio).

2.1 Esempio

Dato l'alfabeto A contenente la costante c, le funzioni $f^{(1)}, g^{(2)}$ e i predicati $A^{(2)}, B^{(3)}$, si considera un modello $\mathcal{M} = (\mathbb{N}, I)$ per A sul dominio dei numeri naturali $\mathbb{N}$.

I deve fornire l'interpretazione degli elementi dell'alfabeto nel contesto dei numeri naturali:

- $I(c) \in \mathbb{N}$, quindi a c deve essere associato un numero naturale;
- $I(f) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ deve essere una funzione dai naturali nei naturali;
- $I(g) : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ deve essere una funzione dalle coppie di naturali nei naturali;
- $I(A) \subseteq \mathbb{N}^2$ deve essere una relazione binaria sui naturali (cioè un sottoinsieme delle coppie di numeri naturali);
- $I(B) \subseteq \mathbb{N}^3$ deve essere una relazione ternaria sui naturali (ovvero un sottoinsieme delle triple di numeri naturali).

[1] I modelli sono definiti sulla base degli alfabeti: infatti, un modello deve attribuire un significato a tutti gli elementi che possono comparire in una formula, e questi sono appunto quelli specificati nell'alfabeto.

3 Assegnamenti

La definizione di modello non attribuisce un significato alle variabili. Infatti, il meccanismo di interpretazione delle variabili è indipendente dallo specifico modello: una variabile può assumere come significato un qualunque elemento del dominio. Tale meccanismo prende il nome di **assegnamento**, o anche **ambiente** o **interpretazione delle variabili**.

Definizione: Dato un modello $\mathcal{M} = (D, I)$, un **assegnamento** (per $\mathcal{M}$) è una funzione

$$e_{\mathcal{M}} : VAR \to D$$

Per comodità, si indica con $[d_1/x_1, \dots, d_n/x_n]$ l'assegnamento e tale che:

- $e(x_1) = d_1, \; \dots, \; e(x_n) = d_n$;
- $e(x)$ è un valore qualunque per $x \notin \{x_1, \dots, x_n\}$.

Essa è utile perché un assegnamento assegna un valore a ogni variabile, quindi per definirlo è necessario specificare come si comporta su tutte le infinite variabili, ma una formula contiene solo un numero finito di variabili, e, come si dimostrerà più avanti, queste sono le uniche che ne influenzano il valore di verità.

4 Interpretazione dei termini

Definizione: Dati un modello $\mathcal{M} = (D, I)$ (per l'alfabeto A), un assegnamento e (su $\mathcal{M}$) e un termine t (su A), l'interpretazione di t in $\mathcal{M}$ rispetto a e è un elemento del dominio D, indicato da $[\![t]\!]^e_{\mathcal{M}}$ e così definito:

- se t è una costante c, allora $[\![t]\!]^e_{\mathcal{M}} = I(c)$;
- se t è una variabile x, allora $[\![t]\!]^e_{\mathcal{M}} = e(x)$;
- se $t = f(t_1, \dots, t_n)$, allora $[\![t]\!]^e_{\mathcal{M}} = I(f)([\![t_1]\!]^e_{\mathcal{M}}, \dots, [\![t_n]\!]^e_{\mathcal{M}})$.

$[\![t]\!]^e_{\mathcal{M}}$ è anche detto elemento (del dominio) *denotato* da t (rispetto a $\mathcal{M}, e$).

Osservazione: L'interpretazione di un termine è sempre un elemento del dominio, quindi, come già accennato, ai termini *non* si associa un valore di verità.

4.1 Esempi

- Dati
  - l'alfabeto con le costanti c, d e la funzione $f^{(2)}$;
  - il termine $t = f(c, d)$;
  - il modello $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$ tale che

  $$\begin{gathered} I(c) = 2,\ I(d) = 3 \\ I(f) : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \quad I(f)(n, m) = n + m \end{gathered}$$

  l'interpretazione del termine t in $\mathcal{A}$ è:

  $$\begin{aligned} [\![f(c, d)]\!]_{\mathcal{A}} &= I(f)([\![c]\!]_{\mathcal{A}}, [\![d]\!]_{\mathcal{A}}) \\ &= I(f)(I(c), I(d)) \\ &= I(f)(2, 3) \\ &= 2 + 3 \\ &= 5 \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

  Osservazione: Siccome il termine t non contiene variabili, non è necessario fissare un assegnamento per interpretarlo.

- Considerando
  - l'alfabeto con la costante c e le funzioni $f^{(3)}, g^{(2)}$;
  - il termine $t = f(x, g(y, c), f(y, c, g(x, c)))$;
  - il modello $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$, dove $I(c) = 4$ e

  $$\begin{aligned} I(f) &: \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N} \quad I(f)(n, m, h) = n + m \cdot h \\ I(g) &: \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N} \quad I(g)(n, m) = n \cdot m \end{aligned}$$

  - l'assegnamento e su $\mathcal{A}$ tale che $e(x) = 1$ e $e(y) = 2$;

l'interpretazione del termine t in $\mathcal{A}$ rispetto a e è:

$$\begin{aligned}
[\![t]\!]^e_{\mathcal{A}} &= [\![f(x, g(y, c), f(y, c, g(x, c)))]\!]^e_{\mathcal{A}} \\
&= I(f)([\![x]\!]^e_{\mathcal{A}}, [\![g(y, c)]\!]^e_{\mathcal{A}}, [\![f(y, c, g(x, c))]\!]^e_{\mathcal{A}}) \\
&= I(f)(e(x), I(g)([\![y]\!]^e_{\mathcal{A}}, [\![c]\!]^e_{\mathcal{A}}), I(f)([\![y]\!]^e_{\mathcal{A}}, [\![c]\!]^e_{\mathcal{A}}, [\![g(x, c)]\!]^e_{\mathcal{A}})) \\
&= I(f)(e(x), I(g)(e(y), I(c)), I(f)(e(y), I(c), I(g)([\![x]\!]^e_{\mathcal{A}}, [\![c]\!]^e_{\mathcal{A}}))) \\
&= I(f)(e(x), I(g)(e(y), I(c)), I(f)(e(y), I(c), I(g)(e(x), I(c)))) \\
&= I(f)(1, I(g)(2, 4), I(f)(2, 4, I(g)(1, 4))) \\
&= I(f)(1, 2 \cdot 4, I(f)(2, 4, 1 \cdot 4)) \\
&= I(f)(1, 8, I(f)(2, 4, 4)) \\
&= I(f)(1, 8, 2 + 4 \cdot 4) \\
&= I(f)(1, 8, 18) \\
&= 1 + 8 \cdot 18 \\
&= 145 \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

5 Riassegnamenti

Definizione: Sia e è un assegnamento per un modello $\mathcal{M} = (D, I)$, sia $d \in D$, e sia x una variabile. Allora, il **riassegnamento** $e[d/x] : VAR \to D$ è l'assegnamento tale che:

$$\widetilde{\forall} y \in VAR \quad e[d/x](y) = \begin{cases} e(y) & \text{se } y \neq x \\ d & \text{se } y = x \end{cases}$$

In altre parole, $e[d/x]$ è un assegnamento che si comporta come e su tutte le variabili tranne x, alla quale assegna invece il valore d. Ciò sarà necessario per interpretare i quantificatori.

In generale, un riassegnamento su più variabili sarà indicato con la notazione

$$e[d_1/x_1, d_2/x_2, \dots, d_n/x_n]$$

che, formalmente, corrisponde ad effettuare il riassegnamento su una variabile alla volta:

$$e[d_1/x_1, d_2/x_2, \dots, d_n/x_n] = \big(\cdots \big(\big(e[d_1/x_1]\big)[d_2/x_2]\big) \cdots\big)[d_n/x_n]$$

6 Interpretazione delle formule

Il valore di verità di una formula φ è determinato per induzione su φ, a partire da un modello $\mathcal{M}$ e un assegnamento e (su $\mathcal{M}$).

6.1 Notazione

Si userà la notazione

$$(\mathcal{M}, e) \models \varphi$$

per indicare che φ è vera rispetto a $(\mathcal{M}, e)$, e

$$(\mathcal{M}, e) \not\models \varphi$$

per indicare che invece φ *non* è vera rispetto a $(\mathcal{M}, e)$.

Il simbolo $\models$ denota una *relazione* tra le coppie $(\mathcal{M}, e)$ e le formule φ. In alternativa, la verità di φ rispetto a $(\mathcal{M}, e)$ potrebbe essere espressa mediante una funzione dalle formule ai valori di verità:

$$v^{(\mathcal{M},e)} : \mathit{FORM} \to \{0, 1\}$$

Le due definizioni sono equivalenti:

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}, e) \models \varphi &\iff v^{(\mathcal{M},e)}(\varphi) = 1 \\ (\mathcal{M}, e) \not\models \varphi &\iff v^{(\mathcal{M},e)}(\varphi) = 0 \end{aligned}$$

Formalmente, questa funzione è la *funzione caratteristica* (o *indicatrice*) della relazione $\models$.

6.2 Definizione

Fissati un modello $\mathcal{M} = (D, I)$ e un assegnamento e su $\mathcal{M}$, la relazione di **interpretazione** (**valutazione**) delle formule

$$(\mathcal{M}, e) \models \varphi$$

è definita per induzione sulla struttura di φ.

6.2.1 Caso delle formule atomiche

Se $\varphi = P(t_1, \dots, t_n)$ è una formula atomica (caso base), allora la coppia $(\mathcal{M}, e)$ verifica la formula $P(t_1, \dots, t_n)$ se e solo se la n-upla degli elementi denotati da $t_1, \dots, t_n$ rispetto a $(\mathcal{M}, e)$ appartiene alla relazione $I(P)$ che il modello associa al simbolo di predicato P:

$$(\mathcal{M}, e) \models P(t_1, \dots, t_n) \iff ([\![t_1]\!]^e_{\mathcal{M}}, \dots, [\![t_n]\!]^e_{\mathcal{M}}) \in I(P)$$

Osservazione: Si ricorda che, per definizione, $I(P) \subseteq D^n$, cioè $I(P)$ è una relazione n-aria su D. In alternativa, si potrebbe definire l'interpretazione mediante la funzione caratteristica di tale relazione:

$$I(P) : D^n \to \{0, 1\}$$

Allora, si avrebbe:

$$(\mathcal{M}, e) \models P(t_1, \dots, t_n) \iff I(P)([\![t_1]\!]^e_{\mathcal{M}}, \dots, [\![t_n]\!]^e_{\mathcal{M}}) = 1$$

6.2.2 Caso dei connettivi

I connettivi sono trattati in modo analogo a quanto fatto per la logica proposizionale (cambia solo la struttura rispetto alla quale si interpreta la formula):

- Se $\varphi = \neg\psi$:
$$(\mathcal{M}, e) \models \neg\psi \iff (\mathcal{M}, e) \not\models \psi$$

- Se $\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2$:
$$(\mathcal{M}, e) \models \psi_1 \wedge \psi_2 \iff (\mathcal{M}, e) \models \psi_1 \text{ e } (\mathcal{M}, e) \models \psi_2$$

- Se $\varphi = \psi_1 \vee \psi_2$:
$$(\mathcal{M}, e) \models \psi_1 \vee \psi_2 \iff (\mathcal{M}, e) \models \psi_1 \text{ oppure } (\mathcal{M}, e) \models \psi_2$$

- Se $\varphi = \psi_1 \to \psi_2$:
$$(\mathcal{M}, e) \models \psi_1 \to \psi_2 \iff (\mathcal{M}, e) \not\models \psi_1 \text{ oppure } (\mathcal{M}, e) \models \psi_2$$

6.2.3 Caso dei quantificatori

Se $\varphi = \forall x\psi$ o $\varphi = \exists x\psi$, nella formula ψ compaiono tipicamente occorrenze libere della variabile x, che il quantificatore lega. Allora, in pratica, per interpretare tali formule si vede "cosa succede" alle formule ottenute sostituendo a x ciascun elemento del dominio nella sottoformula ψ.

- Se $\varphi = \forall x\psi$:
$$(\mathcal{M}, e) \models \forall x\psi \iff \text{per ogni } d \in D \;\; (\mathcal{M}, e[d/x]) \models \psi$$

- Se $\varphi = \exists x\psi$:
$$(\mathcal{M}, e) \models \forall x\psi \iff \text{esiste } d \in D \text{ tale che } (\mathcal{M}, e[d/x]) \models \psi$$

6.3 Esempi

- Si considerino la formula (atomica) $P(x,y)$, il modello $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, I)$ dove $I(P) = \{(n,m) \mid n \leq m\}$, e l'assegnamento e tale che $e(x) = 2$ ed $e(y) = 10$. Si valuta $P(x,y)$ rispetto alla coppia $(\mathcal{A}, e)$:

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}, e) \models P(x,y) &\iff ([\![x]\!]^e_{\mathcal{A}}, [\![y]\!]^e_{\mathcal{A}}) \in I(P)\\ &\iff (e(x), e(y)) \in I(P)\\ &\iff (2, 10) \in I(P)\\ &\iff 2 \leq 10\end{aligned}$$

  È vero che $2 \leq 10$, quindi la formula è vera rispetto al modello e all'assegnamento scelti: $(\mathcal{A}, e) \models P(x,y)$.

- Considerando ancora il modello e l'assegnamento dell'esempio precedente, si valuta la formula $\forall x P(x,y)$:

$$(\mathcal{A}, e) \models \forall x P(x,y) \iff \text{per ogni } d \in \mathbb{Z}\ \ (\mathcal{A}, e[d/x]) \models P(x,y)$$

  Ciò non è vero, ad esempio per $d = 15$,

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}, e[15/x]) \models P(x,y) &\iff ([\![x]\!]^{e[15/x]}_{\mathcal{A}}, [\![y]\!]^{e[15/x]}_{\mathcal{A}}) \in I(P)\\ &\iff (e[15/x](x), e[15/x](y)) \in I(P)\\ &\iff (15, 10) \in I(P)\\ &\iff 15 \leq 10 \qquad \text{(falso)}\end{aligned}$$

  dunque $(\mathcal{A}, e) \not\models \forall x P(x,y)$.

- Come ultimo esempio, si valuta la formula $\varphi = \forall x(P(x) \to D(x))$ rispetto a un modello $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$ con

$$I(P) = \{x \mid x \text{ è multiplo di } 4\} \qquad I(D) = \{x \mid x \text{ è pari}\}$$

  e a un assegnamento e tale che $e(x) = 2$:

$$\begin{aligned}&(\mathcal{A}, e) \models \forall x(P(x) \to D(x))\\ &\quad\iff \text{per ogni } d \in \mathbb{Z}\ \ (\mathcal{A}, e[d/x]) \models P(x) \to D(x)\\ &\quad\iff \text{per ogni } d \in \mathbb{Z}\ \ (\mathcal{A}, e[d/x]) \not\models P(x) \ \text{ o } \ (\mathcal{A}, e[d/x]) \models D(x)\\ &\quad\iff \text{per ogni } d \in \mathbb{Z}\ \ [\![x]\!]^{e[d/x]}_{\mathcal{A}} \notin I(P) \ \text{ o } \ [\![x]\!]^{e[d/x]}_{\mathcal{A}} \in I(D)\\ &\quad\iff \text{per ogni } d \in \mathbb{Z}\ \ d \notin I(P) \ \text{ o } \ d \in I(D)\\ &\quad\iff \text{per ogni } d \in \mathbb{Z}\ \ d \text{ non è un multiplo di 4 } \text{ o } \ d \text{ è pari}\end{aligned}$$

  Qualunque sia $d \in \mathbb{Z}$, è vero che esso non è un multiplo di 4 oppure è pari, quindi $(\mathcal{A}, e) \models \varphi$.