Azzolini Riccardo 2020-03-19

Soddisfacibilità e conseguenza logica

1 Soddisfacibilità di insiemi

Definizione: Sia Δ un insieme di formule. Δ è **soddisfacibile** se esiste una valutazione v che soddisfa (contemporaneamente) tutte le formule di Δ.

La notazione usata per indicare la soddisfacibilità di un insieme è semplicemente una generalizzazione di quella usata per le singole formule:

- se v soddisfa Δ, si scrive $v \models \Delta$ o $v(\Delta) = 1$;
- viceversa, se v non soddisfa Δ, si scrive $v \not\models \Delta$ o $v(\Delta) = 0$.

Se $v \models \Delta$, si dice anche che *v è un modello di* Δ;

1.1 Esempi

- Dato l'insieme $\Delta = \{p \land q, p\}$, considerando la valutazione v definita da

  $$v(p) = 1 \quad v(q) = 1$$

  si ha che $v \models p \land q$ e $v \models p$, cioè che $v \models \Delta$, quindi Δ è soddisfacibile.

- Si considera l'insieme $\Delta = \{p \land q, \neg p, \neg q\}$. Nessuna valutazione può rendere vere tutte le formule in Δ:
  - per rendere vera $p \land q$, una valutazione dovrebbe assegnare 1 a entrambe le variabili;

    $$v(p) = v(1) = 1$$

  - per rendere vere $\neg p$ e $\neg q$, la stessa valutazione dovrebbe invece assegnare 0 a entrambe le variabili.

    $$v(p) = v(1) = 0$$

  Perciò, Δ è insoddisfacibile.

Attenzione: Il fatto che un insieme sia insoddisfacibile *non significa* che le sue formule siano insoddisfacibili singolarmente. Ad esempio, nel secondo esempio, tutte le formule di $\Delta = \{p \land q, \neg p, \neg q\}$ sono soddisfacibili, ma, complessivamente, l'insieme è insoddisfacibile.

1.2 Esempio di problema

Problema: Tre amiche, Anna, Beatrice e Carla, devono decidere se andare al cinema, ma ci sono alcuni vincoli:

- se Anna va al cinema, allora anche Beatrice e Carla vanno al cinema;
- se Beatrice va al cinema, anche Carla va al cinema;
- se Beatrice va al cinema, ma Carla no, allora Anna non va al cinema;
- Beatrice decide di non andare al cinema.

Dati questi fatti, c'è un modo per determinare quali sono le soluzioni possibili, cioè le situazioni in cui tutte le condizioni sono soddisfatte?

Per modellare il problema, si introducono delle variabili posizionali che rappresentano i fatti:[1]

$$
\begin{aligned}
A &\equiv \text{“Anna va al cinema”} \\
B &\equiv \text{“Beatrice va al cinema”} \\
C &\equiv \text{“Carla va al cinema”}
\end{aligned}
$$

Allora, la situazione è descritta dall'insieme di formule

$$\Delta = \{A \to B \land C, B \to C, B \land \neg C \to \neg A, \neg B\}$$

Individuare una soluzione al problema corrisponde a identificare un assegnamento alle variabili proposizionali che soddisfa questo insieme, e poi interpretare gli assegnamenti come

$$
\begin{aligned}
v(X) = 0 &\equiv \text{“X non va al cinema”} \\
v(X) = 1 &\equiv \text{“X va al cinema”}
\end{aligned}
$$

In altre parole, questo problema ha soluzioni se e solo se Δ è soddisfacibile.

- La valutazione
  $$v(A) = v(B) = v(C) = 0$$
  (tutte e tre le amiche restano a casa) verifica Δ, quindi è una possibile soluzione.
- Anche la valutazione
  $$v(A) = v(B) = 0 \quad v(C) = 1$$
  (solo Carla va al cinema) verifica Δ, quindi è un'altra soluzione.
- Provando tutte le altre valutazioni, si verifica che non esistono ulteriori soluzioni.

[1] In questo caso, per le proposizionali sono indicate con le lettere A, B, C (mentre la convenzione, stabilita in precedenza, è di usare $p, q, \ldots$) perché, in questo modo, risulta più immediato correlarle con le asserzioni che rappresentano (dato che corrispondono alle iniziali dei nomi delle tre amiche).

2 Conseguenza logica

Definizione: Siano Δ un insieme di formule e A una formula. Si dice che A è una **conseguenza logica** di Δ (o che Δ *implica logicamente* A) se, per ogni valutazione v tale che $v \models \Delta$, si ha anche $v \models A$.

Si scrive $\Delta \models A$ per indicare che A è conseguenza logica di Δ,[2] e $\Delta \not\models A$ per indicare che invece non lo è. Per semplificare la notazione, se l'insieme Δ contiene un solo elemento, $\Delta = \{H\}$, si scrive semplicemente $H \models A$, invece di $\{H\} \models A$.

2.1 Esempi

- Sia $\Delta = \{p \to q, p\}$. Si ha che $\Delta \models q$. Infatti, considerando la tavola di verità per $p \to q$,

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	**1**	**1**

  si osserva che l'unica valutazione che soddisfa l'insieme Δ (l'ultima riga della tabella) soddisfa anche p.

- Per verificare se $\Delta_1 = \{p \lor q, r \lor \neg p\} \models q \lor r$, si costruisce la tavola di verità per tutte le formule coinvolte:

p	q	r	$\neg p$	$p \lor q$	$r \lor \neg p$	$q \lor r$
0	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	**1**	**1**	**1**
0	1	1	1	**1**	**1**	**1**
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	**1**	**1**	**1**
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	**1**	**1**	**1**

  Ogni riga che attribuisce 1 a tutte le formule in Δ_1 attribuisce 1 anche a $q \lor r$, perciò $\Delta_1 \models q \lor r$.

- Considerando vera la frase "se piove apro l'ombrello", si può dedurre che:

[2] La conseguenza logica viene indicata con lo stesso simbolo usato per rappresentare la soddisfacibilità di una formula (o di un insieme di formule) rispetto a una valutazione. Ciò non causa ambiguità, dato che è sempre possibile distinguere il significato dal contesto: per la soddisfacibilità, l'elemento a sinistra del simbolo è una valutazione, mentre nel caso della conseguenza logica è un insieme di formule.

1. "se apro l'ombrello, allora sta piovendo"?
2. "se non apro l'ombrello, allora non sta piovendo"?

Per formalizzare il problema, si introducono le variabili proposizionali

$$P \equiv \text{"piove"} \qquad O \equiv \text{"apro l'ombrello"}$$

e quindi si ha

$$\begin{aligned} P \to O &\equiv \text{"se piove apro l'ombrello"} \\ O \to P &\equiv \text{"se apro l'ombrello, allora sta piovendo"} \\ \neg O \to \neg P &\equiv \text{"se non apro l'ombrello, allora non sta piovendo"} \end{aligned}$$

Allora, le due domande corrispondono a chiedersi se:

1. $P \to O \models O \to P$;
2. $P \to O \models \neg O \to \neg P$.

P	O	$\neg P$	$\neg O$	$P \to O$	$O \to P$	$\neg O \to \neg P$
0	0	1	1	**1**	**1**	**1**
0	1	1	0	**1**	**0**	**1**
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	**1**	**1**	**1**

Studiando la tavola di verità, si determina che la 1 non vale (perché la valutazione $v(P) = 0,\ v(O) = 1$ soddisfa $P \to O$, ma non $O \to P$), mentre la 2 vale.