Azzolini Riccardo 2020-03-26

Sostituzione proposizionale

1 Sostituzione proposizionale

La **sostituzione proposizionale** è un meccanismo che permette di costruire nuove formule a partire da una formula data, sostituendo le sue variabili proposizionali con formule arbitrarie.

Idea: Date due formule A e H, e una variabile proposizionale p, $A[H/p]$ è la formula ottenuta *sostituendo simultaneamente* H al posto di ogni occorrenza di p nella formula A.

Ad esempio, se $A = (p \to q) \lor (q \to p)$ e $H = p \lor r$, allora

$$A[H/p] = (p \lor r \to q) \lor (q \to p \lor r)$$

Osservazioni:

- Potrebbe essere che p non occorra in A: in tal caso, la sostituzione non avrà alcun effetto.
- Si dice che la sostituzione avviene simultaneamente per evidenziare il fatto che, una volta sostituita una determinata occorrenza di p con la formula H, non si "ritorna" più su tale sostituzione, anche se H contiene a sua volta p.

Definizione: Siano A e H delle formule, e p una variabile proposizionale. La formula $A[H/p]$, ottenuta *sostituendo H per p in A*, è definita induttivamente su A nel seguente modo:

$$A[H/p] = \begin{cases} \bot & \text{se } A = \bot \\ A & \text{se } A \in \mathit{VAR},\ A \neq p \\ H & \text{se } A = p \\ \neg(B[H/p]) & \text{se } A = \neg B \\ B[H/p] * C[H/p] & \text{se } A = B * C \text{ (con } * \in \{\land, \lor, \to\}) \end{cases}$$

Le formule ottenute da A, operando delle sostituzioni, prendono il nome di **istanze** di A.

1.1 Esempio

Siano $F = p \to \neg(p \vee (q \wedge p))$ e $H = r \vee \neg q$.

$$\begin{aligned} F[H/p] &= p[H/p] \to (\neg p \vee (q \wedge p))[H/p] \\ &= (r \vee \neg q) \to ((\neg p)[H/p] \vee (q \wedge p)[H/p]) \\ &= (r \vee \neg q) \to (\neg p[H/p] \vee (q[H/p] \wedge p[H/p])) \\ &= (r \vee \neg q) \to (\neg(r \vee \neg q) \vee (q \wedge (r \vee \neg q))) \end{aligned}$$

2 Valutazioni e sostituzioni

Proposizione: Siano H e K due formule, e v una valutazione tale che $v(H) = v(K)$. Allora, per ogni formula A e per ogni variabile proposizionale p:

$$v(A[H/p]) = v(A[K/p])$$

Dimostrazione (per induzione sulla struttura di A):

- Se $A = \bot$, allora
  $$A[H/p] = \bot = A[K/p]$$
  cioè entrambe le sostituzioni danno luogo alla stessa formula, $\bot$, quindi è evidente che l'asserto della proposizione è verificato.
- Se $A = q \in VAR$, $q \neq p$, allora, anche in questo caso, entrambe le sostituzioni danno luogo alla stessa formula:
  $$A[H/p] = q = A[K/p]$$
- Se $A = p$, allora $A[H/p] = H$, $A[K/p] = K$, e, per ipotesi, $v(H) = v(K)$.
- Se $A = \neg B$, per ipotesi induttiva si assume che
  $$v(B[H/p]) = v(B[K/p])$$
  e, da questo, segue immediatamente (per la definizione del significato della negazione) che
  $$v(\neg B[H/p]) = v(\neg B[K/p])$$
- Se $A = B \wedge C$, allora
  $$v(B[H/p]) = v(B[K/p]) \qquad v(C[H/p]) = v(C([K/p]))$$
  per ipotesi induttiva, e quindi
  $$v(B[H/p] \wedge C[H/p]) = v(B[K/p] \wedge C[K/p])$$
  La dimostrazione dei casi $A = B \vee C$ e $A = B \to C$ è analoga.

2.1 Equivalenza e sostituzioni

Corollario: Siano H e K due formule tali che $H \equiv K$. Allora, per ogni formula A:

$$A[H/p] \equiv A[K/p]$$

Dimostrazione (della contronominale): Si suppone che $A[H/p] \not\equiv A[K/p]$. Allora, per definizione,

$$\widetilde{\exists} v\colon v(A[H/p]) \neq v(A[K/p])$$

Dalla proposizione precedente, siccome le due istanze di A hanno valutazioni diverse, si deduce che $v(H) \neq v(K)$, e perciò $H \not\equiv K$.

3 Tautologie e sostituzioni

Teorema: Sia A una tautologia contenente la variabile proposizionale p, e sia H una qualunque formula. Allora, anche $A[H/p]$ è una tautologia.

Dimostrazione (della contronominale): Si suppone che $A[H/p]$ non sia una tautologia. Questo significa che $\widetilde{\exists} v\colon v(A[H/p]) = 0$. Sia allora v' una nuova valutazione, definita a partire dalla valutazione v (cioè quella che falsifica la formula $A[H/p]$):

$$v'(q) = \begin{cases} v(q) & \text{se } q \neq p \\ v(H) & \text{se } q = p \end{cases}$$

Si può quindi verificare (per induzione) che $v'(A) = v(A[H/p]) = 0$. In altre parole, v' è una valutazione che non soddisfa A, e ciò significa che A non è una tautologia, contrariamente all'ipotesi del teorema.

3.1 Esempio

Questo teorema è importante perché significa che, una volta dimostrato che una formula è una tautologia, questa può essere usata come uno "schema" dal quale ottenere, mediante sostituzione, tante altre tautologie.

Ad esempio, la legge di Dummett

$$A = (p \to q) \lor (q \to p)$$

è una tautologia. Allora, per il teorema precedente, anche l'istanza ottenuta sostituendo p con $(p \land q)$

$$A[(p \land q)/p] = (p \to (p \land q)) \lor ((p \land q) \to p)$$

è una tautologia.