Azzolini Riccardo 2020-03-26

# Forme normali

## 1 Forme normali

In generale, in matematica, una **forma normale** di un oggetto matematico è una sua rappresentazione in una forma prestabilita, che preserva l'equivalenza con l'oggetto originario rispetto a una determinata relazione di equivalenza. In altre parole, una forma normale è un modo "standard" per descrivere una famiglia di oggetti matematici, che evidenzia un certo tipo di struttura di tali oggetti.

Prende il nome di **normalizzazione** il processo di trasformazione di un oggetto matematico in una forma normale.

Nel contesto della logica proposizionale classica:

- gli oggetti matematici sono le formule;
- la relazione di equivalenza che si vuole preservare nella normalizzazione è l'equivalenza logica;
- le forme normali sono la *forma normale disgiuntiva* (DNF) e la *forma normale congiuntiva* (CNF).

## 2 Forma normale disgiuntiva

*Definizione*: Un **letterale** è una variabile o la negazione di una variabile:

$$p, \neg p, q, \neg q, r, \neg q, \dots \qquad VAR = \{p, q, r, \dots\}$$

*Definizione*: Una formula è in **forma normale disgiuntiva** (**DNF**, *Disjunctive Normal Form*) se è della forma

$$\bigvee_{i=1}^{n} \left( \bigwedge_{j=1}^{m_i} l_{i,j} \right) = (l_{1,1} \wedge \cdots \wedge l_{1,m_1}) \vee \cdots \vee (l_{n,1} \wedge \cdots \wedge l_{n,m_n})$$

dove, per ogni $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m_i$ (con $n \geq 1$ e $m_i \geq 1$), $l_{i,j}$ è un letterale.

### 2.1 Esempi e casi particolari

- La formula
$$(p \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge p \wedge q)$$
è in DNF, con $n = 2$ (due *disgiunti*), $m_1 = 2$ (due *congiunti*, letterali, nel primo disgiunto) e $m_2 = 3$ (tre congiunti nel primo disgiunto).

- Se $n = 1$, la disgiunzione ha un solo disgiunto, che deve essere una congiunzione di letterali. Ad esempio:
$$\neg r \wedge p \wedge q \qquad (n = 1,\ m_1 = 3)$$

- Se $m_i = 1$, allora l'$i$-esimo disgiunto è costituito da un solo congiunto. Ad esempio:
$$p \vee (q \wedge \neg p) \vee (\neg r \wedge p \wedge q) \vee r \qquad (n = 4,\ m_1 = 1,\ \dots,\ m_4 = 1)$$

- Se $m_i = 1$ per ogni $i$, allora si hanno formule che sono disgiunzioni di letterali. Ad esempio:
$$\neg p \vee q \vee \neg p \qquad (n = 3,\ m_1 = m_2 = m_3 = 1)$$

- Se $n_1 = 1$ e $m_1 = 1$, allora si ha un solo letterale, che è un caso speciale di DNF. Ad esempio:
$$p \qquad \neg q$$

## 3 Forma normale congiuntiva

*Definizione*: Una formula è in **forma normale congiuntiva** (**CNF**, *Conjunctive Normal Form*) se è della forma

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \left( \bigvee_{j=1}^{m_i} l_{i,j} \right) = (l_{1,1} \vee \cdots \vee l_{1,m_1}) \wedge \cdots \wedge (l_{n,1} \vee \cdots \vee l_{n,m_n})$$

dove, per ogni $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m_i$ (con $n \geq 1$ e $m_i \geq 1$), $l_{i,j}$ è un letterale.

Questa forma è la *duale* della DNF, cioè, rispetto a quest'ultima, vengono scambiati i ruoli della congiunzione e della disgiunzione.

### 3.1 Esempi

- La formula
$$(p \vee \neg q) \wedge (\neg q \vee r)$$
è in CNF, con $n = 2,\ m_1 = 2,\ m_2 = 2$ (due congiunti, ciascuno costituito da due disgiunti, cioè letterali).
- La formula
$$\neg q \wedge (p \vee r)$$
è in CNF, con $n = 2,\ m_1 = 1,\ m_2 = 2$.
- La formula
$$\neg q \wedge p \wedge r$$
è in CNF, con $n = 3,\ m_1 = m_2 = m_3 = 1$, ma anche in DNF, con $n = 1,\ m_1 = 3$.
- La formula
$$\neg q \vee r \vee \neg r$$
è in CNF, con $n = 1,\ m_1 = 3$, e anche in DNF, con $n = 3,\ m_1 = m_2 = m_3 = 1$.

## 4 Normalizzazione di una formula

Esiste un metodo algebrico per trasformare una qualunque formula in una DNF (o in una CNF), applicando una serie di passi di trasformazione che sfruttano le equivalenze logiche introdotte in precedenza:

1. si eliminano le occorrenze dell'implicazione, usando l'equivalenza logica
$$A \to B \equiv \neg A \vee B$$
2. si utilizzano ripetutamente le leggi di De Morgan e la legge della doppia negazione per portare le negazioni davanti agli atomi (variabili proposizionali);
3. utilizzando le proprietà distributive, si trasforma la formula in una DNF (o CNF).

## 4.1 Esempi

- Si vuole trasformare la formula $P = \neg p \wedge (q \to \neg r)$ in DNF e CNF:

  $$P = \neg p \wedge (q \to \neg r)$$

  Per $A \to B \equiv \neg A \vee B$:

  $$\equiv \neg p \wedge (\neg q \vee \neg r)$$

  Per $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$:

  $$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee \neg r) \qquad \text{DNF}$$

  Per $(A_1 \wedge A_2) \vee (B_1 \wedge B_2) \equiv (A_1 \vee B_1) \wedge (A_1 \vee B_2) \wedge (A_2 \vee B_1) \wedge (A_2 \vee B_2)$:

  $$\equiv (\neg p \vee \neg p) \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee \neg r) \qquad \text{CNF}$$

  La CNF si può semplificare, per $A \vee A = A$:

  $$\equiv \neg p \wedge (\neg p \vee \neg r) \wedge (\neg q \vee \neg p) \vee (\neg q \vee \neg r)$$

  *Osservazione*: In realtà, in questo caso, già la formula $\neg p \wedge (\neg q \vee \neg r)$, ottenuta dopo il primo passo di trasformazione (l'eliminazione dell'implicazione), è una CNF.

- Si vuole trasformare in DNF la formula $P = (\neg p \wedge (q \to \neg r)) \to (r \vee (q \to p))$:

  $$\begin{aligned} P &\equiv (\neg p \wedge (\neg q \vee \neg r)) \to (r \vee (\neg q \vee p)) \\ &\equiv \neg(\neg p \wedge (\neg q \vee \neg r)) \vee (r \vee (\neg q \vee p)) \\ &\equiv (\neg\neg p \vee \neg(\neg q \vee \neg r)) \vee (r \vee \neg q \vee p) \\ &\equiv (p \vee (\neg\neg q \wedge \neg\neg r)) \vee (r \vee \neg q \vee p) \\ &\equiv p \vee (q \wedge r) \vee r \vee \neg q \vee p \end{aligned}$$

## 4.2 Formule contenenti $\bot$

Per normalizzare una formula $A$ contenente $\bot$, si può usare il "trucco" di sostituirla con una formula che non contiene $\bot$, sfruttando ad esempio l'equivalenza $\bot \equiv w \wedge \neg w$ (con $w \in VAR$). Infatti, se $A'$ è la formula ottenuta sostituendo $\bot$ con $w \wedge \neg w$ nella formula $A$, si può verificare che, per ogni valutazione $v$, $v(A) = v(A')$.

Formalmente, il processo di sostituzione di $\bot$ nella formula $A$ andrebbe giustificato con una nozione di sostituzione sulla costante $\bot$, introducendo una notazione ($A[H/\bot]$, dove $H$ è una formula) e una definizione simili a quelle della sostituzione proposizionale. Però, la definizione di sostituzione proposizionale si estende facilmente alla costante $\bot$ (sostanzialmente, è sufficiente considerare quest'ultima come se fosse una variabile), e tutti i risultati dimostrati per la sostituzione proposizionale si preservano anche con questa estensione.